

Tarea 2

Campos Electromagnéticos (ELO250) – 1^{er} Semestre 2010
Departamento de Electrónica, Universidad Técnica Federico Santa María

Plazo de Entrega:

Hasta el viernes 4 de junio de 2010, a las 12:00, en Pañol de Electrónica.

No se recibirá tareas por e-mail (sólo impresas o escritas a mano)

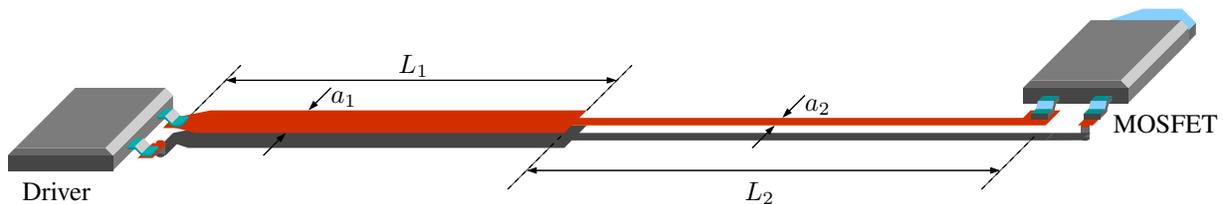
La señal de disparo para un transistor MOSFET, cuya capacitancia *gate-drain* es de 23 [pF]^1 , es generada por un circuito integrado MOSFET *driver* con impedancia de salida es $Z_G = 1 \text{ [\Omega]}$. La impedancia de entrada del MOSFET es puramente capacitiva. Ambos dispositivos están montados sobre un circuito impreso de espesor $d = 1 \text{ [mm]}$, de doble faz, cuyo dieléctrico tiene permividad eléctrica $\epsilon = 16\epsilon_0$ y conductividad nula. Ambos componentes se conectan mediante dos tramos rectos de pistas de circuito impreso, replicados a cada lado de la placa, como se muestra en la figura. Los anchos de las pistas en cada tramo son $a_1 = 10 \text{ [mm]}$ y $a_2 = 3 \text{ [mm]}$, respectivamente. El largo total de los tramos es $20 \text{ [cm]} = L \triangleq L_1 + L_2$.

Asumiendo que para toda frecuencia angular $\omega \geq 0$ se cumple que

- las pistas no tienen pérdidas,
- para todas las frecuencias la impedancia característica de cada tramo de línea es simplemente $\sqrt{\mu_0/\epsilon} \frac{d}{a}$,
- la constante de fase β se puede aproximar como $\omega\sqrt{\mu_0\epsilon}$,

resuelva lo siguiente:

1. (80 ptos.) Encuentre la expresión para la respuesta en frecuencia² $H(j\omega)$ desde el voltaje generado por el driver hasta los bornes gate-drain del MOSFET, en función de Z_1, Z_2 (las impedancias características de cada tramo), Γ_L, Γ_G (los coeficientes de reflexión en generador y carga), β, L y la diferencia $s \triangleq L_1 - L_2$. Verifique que $H(0) = 1$.
2. (5 ptos.) Grafique $|H(j\omega)|$ para $\omega \in [0, 10^9] \text{ [rad/s]}$ (usando Matlab u otro software similar) para el caso $L_1 = 0, L_2 = L$. No olvide rotular los ejes del gráfico.
3. (5 ptos.) Repita la pregunta 2 para el caso $L_1 = L_2 = L/2$.
4. (10 ptos.) Grafique la tensión en los bornes gate-drain del MOSFET, en función del tiempo, si el driver genera un único pulso rectangular de amplitud 5 [V] y 16 [ns] de duración, primero para el caso 2 ($L_1 = 0$) y luego para el caso 3 ($L_2 = L_1 = L/2$). No olvide rotular los ejes de los gráficos e indicar las unidades en cada eje.



¹Un ejemplo de MOSFET con tal capacitancia de entrada lo constituye el transistor PMZ760SN, un dispositivo compacto capaz de disipar hasta 2.5 [W] .

²Ayuda: Si en un sistema lineal e invariante en el tiempo los fasores de tensión de entrada V_G y salida V_L están relacionados por $V_L = H(j\omega)V_G$, para alguna función $H(j\omega)$, entonces la respuesta en frecuencia entre la entrada y la salida del sistema es $H(j\omega)$.

SOLUCIÓN

1) La impedancia aparente que presenta la carga vista desde el extremo izquierdo del tramo 2 es

$$Z_A \triangleq Z(x = L_1) = Z_2 \frac{1 + \Gamma_L e^{-j\beta L_2}}{1 - \Gamma_L e^{-j\beta L_2}}, \quad (10p) \quad (1)$$

donde

$$\beta = 4\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = \frac{4}{c}\omega \quad (10p) \quad (2)$$

es la constante de fase en ambos tramos. Luego, la tensión en $x = L_1$ es

$$V_A \triangleq V(x = L_1) = V_G \frac{Z_G}{Z_1 + Z_G} e^{-j\beta L_1} \frac{1 + \Gamma_A}{1 - \Gamma_G \Gamma_A e^{-j2\beta L_1}}, \quad (10p) \quad (3)$$

donde

$$\Gamma_A \triangleq \frac{Z_A - Z_1}{Z_A + Z_1} = \frac{Z_2 \frac{1 + \Gamma_L e^{-j\beta L_2}}{1 - \Gamma_L e^{-j\beta L_2}} - Z_1}{Z_2 \frac{1 + \Gamma_L e^{-j\beta L_2}}{1 - \Gamma_L e^{-j\beta L_2}} + Z_1} = \frac{Z_2(1 + \Gamma_L e^{-j\beta L_2}) - Z_1(1 - \Gamma_L e^{-j\beta L_2})}{Z_2(1 + \Gamma_L e^{-j\beta L_2}) + Z_1(1 - \Gamma_L e^{-j\beta L_2})} \quad (10p) \quad (4)$$

Para el segundo tramo de la línea, el tramo 1 es equivalente a una fuente de tensión de valor V_A e impedancia interna cero conectada en su extremo izquierdo. Por lo tanto

$$\begin{aligned} V_L &= V_A e^{-j\beta L_2} \frac{1 + \Gamma_L}{1 + \Gamma_L e^{-j2\beta L_2}} \\ &= V_G \frac{Z_1}{Z_1 + Z_G} e^{-j\beta L} \frac{(1 + \Gamma_A)(1 + \Gamma_L)}{(1 - \Gamma_G \Gamma_A e^{-j2\beta L_1})(1 + \Gamma_L e^{-j2\beta L_2})}, \end{aligned} \quad (10p) \quad (5)$$

ya que $L_1 + L_2 = L$. A partir de (4) se cumple que

$$1 + \Gamma_A = \frac{2Z_2(1 + \Gamma_L e^{-j\beta L_2})}{Z_2(1 + \Gamma_L e^{-j\beta L_2}) + Z_1(1 - \Gamma_L e^{-j\beta L_2})}. \quad (6)$$

Sustituyendo ésto y (4) en (5), obtenemos

$$\begin{aligned} V_L &= \\ &= \frac{V_G Z_1}{Z_1 + Z_G} \cdot \frac{2Z_2(1 + \Gamma_L) e^{-j\beta L}}{Z_2(1 + \Gamma_L e^{-j2\beta L_2}) + Z_1(1 - \Gamma_L e^{-j2\beta L_2}) - [Z_2(1 + \Gamma_L e^{-j2\beta L_2}) - Z_1(1 - \Gamma_L e^{-j2\beta L_2})] \Gamma_G e^{-j2\beta L_1}} \\ &= \frac{V_G Z_1}{Z_1 + Z_G} \cdot \frac{2Z_2(1 + \Gamma_L) e^{-j\beta L}}{Z_2(1 + \Gamma_L e^{-j2\beta L_2})(1 - \Gamma_G e^{-j2\beta L_1}) + Z_1(1 - \Gamma_L e^{-j2\beta L_2})(1 + \Gamma_G e^{-j2\beta L_1})} \end{aligned} \quad (15p)$$

Reordenando los términos en el denominador para escribir todo en función de L y s obtenemos

$$V_L = V_G \frac{Z_1}{Z_1 + Z_G} \cdot \frac{2Z_2(1 + \Gamma_L) e^{-j\beta L}}{(Z_2 + Z_1)(1 - \Gamma_L \Gamma_G e^{-j2\beta L}) + (Z_2 - Z_1)(\Gamma_L e^{-j2\beta L_2} - \Gamma_G e^{-j2\beta L_1})} \quad (7)$$

y finalmente

$$V_L = V_G \frac{Z_1}{Z_1 + Z_G} \cdot \frac{2Z_2(1 + \Gamma_L)}{(Z_2 + Z_1)(e^{j\beta L} - \Gamma_L \Gamma_G e^{-j\beta L}) + (Z_2 - Z_1)(\Gamma_L e^{j\beta s} - \Gamma_G e^{-j\beta s})} \quad (15p) \quad (8)$$

2) Es posible graficar la función de transferencia pedida partir de (8). Alternativamente, es posible expresar primero los coeficientes de reflexión en (7) explícitamente en función de las impedancias respectivas, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{4Z_1 Z_2 Z_L e^{-j\beta L}}{(Z_2 + Z_1)([Z_2 + Z_L][Z_1 + Z_G] - [Z_L - Z_2][Z_G - Z_1] e^{-j2\beta L}) + (Z_2 - Z_1)([Z_L - Z_2][Z_1 + Z_G] e^{-j2\beta L_2} - [Z_G - Z_1][Z_L + Z_2] e^{-j2\beta L_1})} \\ &= \frac{4Z_1 Z_2 Z_L e^{-j\beta L}}{(Z_2 + Z_1)([Z_2 Z_1 + Z_L Z_G][1 - e^{-j2\beta L}] + [Z_2 Z_G + Z_1 Z_L][1 + e^{-j2\beta L}]) + (Z_2 - Z_1)([Z_L Z_G - Z_2 Z_1] e^{-j2\beta L_2} - e^{-j2\beta L_1}) + [Z_L Z_1 - Z_2 Z_G] e^{-j2\beta L_2} + e^{-j2\beta L_1}} \end{aligned}$$

y luego, reemplazando las exponenciales complejas por senos y cosenos, llegamos a

$$H(j\omega) = 2Z_1Z_2Z_L \left\{ (Z_2 + Z_1) (j[Z_2Z_1 + Z_LZ_G] \sin(\beta L) + [Z_2Z_G + Z_1Z_L] \cos(\beta L)) \right. \\ \left. + (Z_2 - Z_1) (j[Z_LZ_G - Z_2Z_1] \sin(\beta s) + [Z_LZ_1 - Z_2Z_G] \cos(\beta s)) \right\}^{-1} \quad (9)$$

que es la expresión más sencilla que se puede obtener si se desea tener todo en función sólo de β , s , L y las impedancias del sistema.

Si intentamos evaluar numéricamente (9) para $\omega = 0$ tendremos un problema, ya que el numerador de dicha expresión, que contiene la impedancia de carga $Z_L = 1/(j\omega C)$, se indefine. Para solucionar este inconveniente, definimos la admitancia de carga $Y_L \triangleq 1/Z_L = j\omega C$ y multiplicamos numerador y denominador de (9) por esta cantidad, lo que arroja

$$H(j\omega) = 2Z_1Z_2 \left\{ (Z_2 + Z_1) (j[Y_LZ_2Z_1 + Z_G] \sin(\beta L) + [Y_LZ_2Z_G + Z_1] \cos(\beta L)) \right. \\ \left. + (Z_2 - Z_1) (j[Z_G - Y_LZ_2Z_1] \sin(\beta s) + [Z_1 - Y_LZ_2Z_G] \cos(\beta s)) \right\}^{-1} \quad (10)$$

El siguiente *script* de Matlab permite graficar la magnitud de $H(j\omega)$ a partir de (10):

```
L = 0.2; % L = 20 cm
ZG = 1; % Impedancia del generador
C = 23e-12; % C = 23 pF
d = 1;
a1 = 10; % Ancho del tramo 1, en milímetros
a2 = 3; % Ancho del tramo 2, en milímetros
Z1 = 30*pi*d/a1; % Impedancia característica del tramo 1, en Ohms
Z2 = 30*pi*d/a2; % Impedancia característica del tramo 1, en Ohms
beta = @(w) w*4/(3e8); % beta como funcion de la frecuencia angular w.
YL = @(w) i*(w*C); % Admitancia de carga como funcion de w.
H = @(w,s) 2*Z1*Z2./...
    ((Z2+Z1)*(i*(Z2*Z1*YL(w)+ ZG).*sin(beta(w)*L) ...
    + (YL(w)*Z2*ZG + Z1).*cos(beta(w)*L)) ...
    +(Z2-Z1).(i*(ZG - YL(w)*Z2*Z1).*sin(beta(w)*s) ...
    + (Z1 - YL(w)*Z2*ZG).*cos(beta(w)*s)));
wv = [0:1000:1e9];%Vector de frecuencias angulares sobre las cuales evaluar |H(jw)|
% Primero graficamos para el caso L1=0, lo que corresponde a s=-L
s = -L;
magH = abs(H(wv,s));
plot(wv,magH, 'DisplayName','|H(j\omega)| para L_1 = 0','color',...
    'r','LineStyle','-','LineWidth',2);
grid;
hold on;
% Ahora graficamos para el caso L1=L2, lo que corresponde a s=0
s = 0;
magH = abs(H(wv,s));
plot(wv,magH, 'DisplayName','|H(j\omega)| para L_1 = L_2','color',...
    'b','LineStyle','--','LineWidth',2);
xlabel('Frecuencia angular, [rad/s]');
ylabel('|H(j\omega)|');
legend('show');
```

El resultado se muestra en la figura 1:

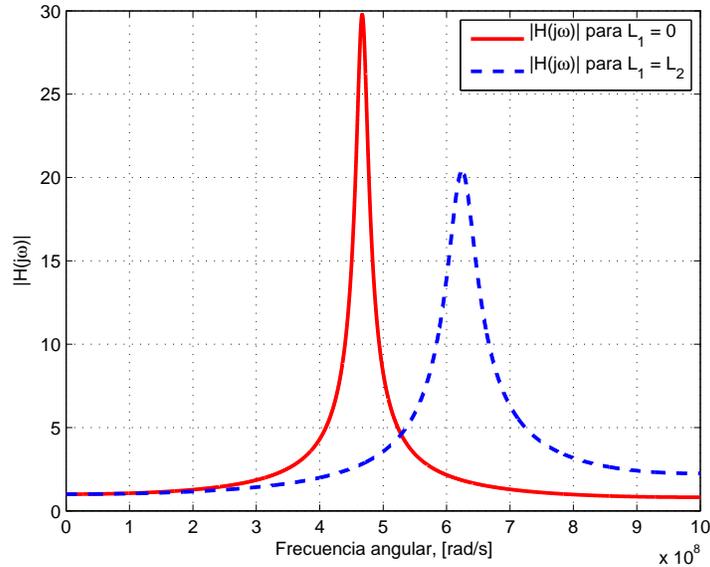


Figura 1: Magnitud de la respuesta en frecuencia entre v_G y v_L para $s = -L$ y para $s = 0$.

3) Ver el gráfico generado en la parte 2).

4) La transformada de Fourier de un pulso rectangular $v_G(t)$ de amplitud A centrado en $t = 0$, de duración $2T$ [s] es

$$V_G(j\omega) = A \int_0^{2T} e^{-j\omega t} dt = A e^{-j\omega T} \int_{-T}^T e^{-j\omega r} dr = 2A e^{-j\omega T} \int_0^T \cos(\omega r) dr = 2A \frac{\sin(T\omega)}{\omega} e^{-j\omega T} \quad (11)$$

La transformada de Fourier de la tensión en la carga $v_L(t)$ es

$$V_L(j\omega) = H(j\omega)V_G(j\omega). \quad (12)$$

La expresión temporal para la tensión en los bornes de la carga $v_L(t)$ puede entonces recuperarse aplicando la transformada de Fourier inversa a $V_L(j\omega)$. A partir de la forma de $H(j\omega)$, parece imposible obtener dicha transformada de manera analítica. Por lo tanto, debemos recurrir al cálculo numérico de la transformada de Fourier inversa mediante la *inverse discrete Fourier transform* (IDFT) y su eficiente implementación algorítmica, llamada *inverse fast Fourier transform* (IFFT).

Para obtener una aproximación de $v_L(t)$ con suficiente resolución temporal utilizando la IDFT es necesario considerar un ancho de banda superior o igual a π por el inverso de dicha resolución. Más precisamente, si tomamos N muestras de frecuencia a intervalos de ω_0 [rad/s] entre 0 y $(N-1)\omega_0$, entonces el paso de frecuencia para la IDFT será $\Omega = 2\pi/(2N) = \pi/N$ [rad/muestra] y la frecuencia de muestreo temporal será $f = 2N\omega_0/(2\pi) = N\omega_0/\pi$. En consecuencia, la IDFT entregará muestras de la señal $v_L(t)$ tomadas a intervalos de $\tau = 1/f = \pi/(N\omega_0)$ [s]. Así, si se desea una resolución temporal mínima igual a τ [s], entonces se debe considerar una banda de frecuencias entre 0 [rad/s] y por lo menos π/τ [rad/s].

Por otro lado, la densidad de muestras espectrales debe ser suficiente para lograr un bajo *aliasing* temporal. Para determinar dicha densidad de muestras es necesario conocer la duración temporal de la señal que se está procesando. Si bien no conocemos este dato a priori, podemos acotar cuán rápido decae $v_L(t)$ a partir de los datos del problema. Para tal efecto, y dado que Γ_L depende de ω , lo supondremos 1, situación que entrega un decaimiento de $v_L(t)$ más lento que el verdadero. En tal caso, y dado que

$$\Gamma_G = \frac{1 - 10\pi}{1 + 10\pi} \simeq -0,938,$$

y que un viaje de “ida y vuelta” por los 20 cm de línea toma $T_0 = 40 \times 10^{-2} / (3 \times 10^8 / 4) = \frac{16}{3}$ [ns], tenemos que

$$|v_L(t)| \simeq V_{Lmax} |\Gamma_G|^{t/T_0} = V_{Lmax} 0,938^{3t \times 10^9 / 16}.$$

Así, cuando $t = 40T_0 \simeq 213,3$ [ns], $|v_L(t)|$ habrá decaído a aproximadamente 0,08 veces su valor máximo.

En vista de lo anterior, escogeremos los valores $\tau = 0,5$ [ns] y $N = 1200$ muestras, lo que da un rango temporal de $2N\tau = 600$ [ns]. El código Matlab es el siguiente (que debe ser ejecutado a continuación del script de la pregunta anterior):

```
tau = 0.5e-9;           % El periodo de muestreo temporal
A = 5;                 % La amplitud de V_G es 5 [V].
T = 8e-9;              % La mitad de la duracion del pulso de V_G (16/2 [ns]).
N = 1200;              % El numero de muestras de la mitad positiva de VL
w0 = pi/(N*tau);       % El intervalo de muestreo espectral
VG = @(w) (1/tau)*exp(-i*w*T).*min(2*A*T,2*A*sin(T*w)./w);
                        % La transformada de Fourier de V_G escalada
                        %
                        %
figure; hold on; grid on;
VL = @(w) VG(w).*H(w,-L); % La transformada de Fourier de V_L como
                        %
                        %
VLfft(1:N+1) = VL([0:w0:N*w0]);
VLfft(N+2:2*N) = VL([- (N-1)*w0:w0:-w0]);
vL = ifft(VLfft);
Tmax = 100; % Tiempo final en [ns] a dibujar de las respuestas temporales
tv = [0:tau:(Tmax-1)*tau]/1e-9;
plot(tv,abs(vL(1:Tmax)),'DisplayName','v_L(t), s=-L');
% Para comparar, trazar también la tension del generador
VGfft(1:N+1) = VG([0:w0:N*w0]);
VGfft(N+2:2*N) = VG([- (N-1)*w0:w0:-w0]);
vG = ifft(VGfft);
plot(tv,abs(vG(1:Tmax)),'--r','DisplayName','v_G(t)','LineStyle',...
      '--','LineWidth',1);

xlabel('Tiempo [ns]');
ylabel('Tension [V]');
% Ahora calcule con L1=L2, es decir, con s=0
VL = @(w) VG(w).*H(w,0); % La transformada de Fourier de V_L como
                        %
                        %
VLfft(1:N+1) = VL([0:w0:N*w0]);
VLfft(N+2:2*N) = VL([- (N-1)*w0:w0:-w0]);
vL = ifft(VLfft);
plot(tv,abs(vL(1:Tmax)),'DisplayName','v_L(t), s=0',...
      'color','k','LineStyle','-','LineWidth',1);

legend('show');
```

El resultado se muestra en la figura 2:

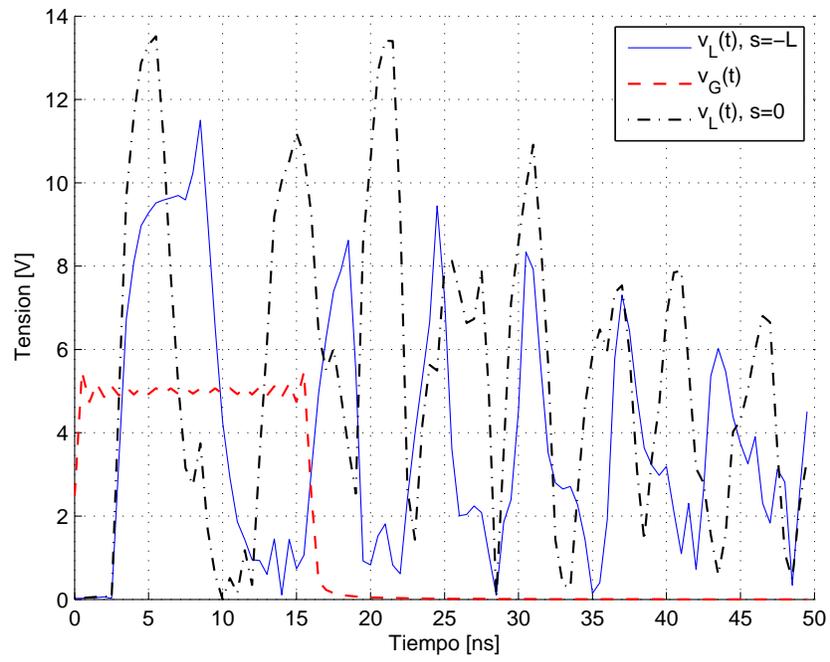


Figura 2: Tensiones $v_G(t)$ y $v_L(t)$ para $s = -L$ y para $s = 0$.