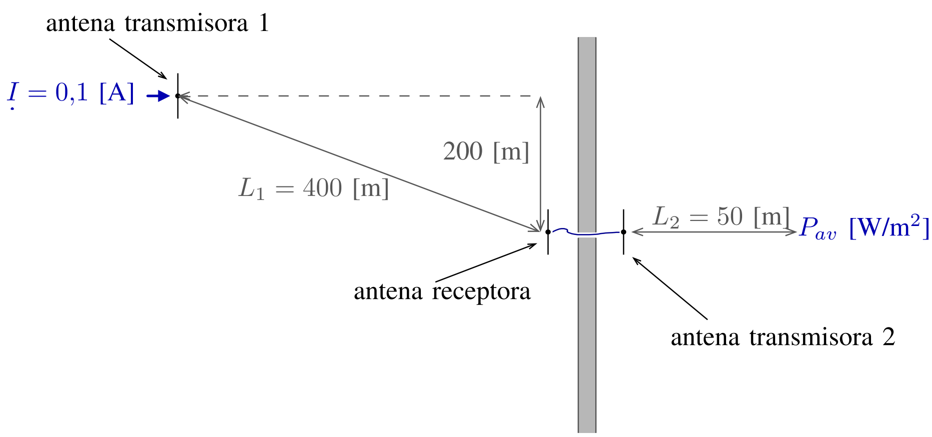
Tarea 3, Parte 2

Campos Electromagnéticos (ELO250) – 1^{er} Semestre 2010
Departamento de Electrónica, Universidad Técnica Federico Santa María
Plazo de Entrega:
Parte 2: Hasta el lunes 12 de julio de 2010, a las 12:00, en Pañol de Electrónica.
No se recibirá tareas por e-mail (sólo impresas o escritas a mano)

Se tiene tres antenas dipolos idénticas, cada una con longitud total $3\lambda/2$, con $\lambda = 1$ [m], todas alineadas verticalmente, como se muestra en la figura. La resistencia de radiación de todas las antenas es $R_{rad} = 222$ [Ω]. La antena transmisora 1 es alimentada con una corriente (fasor) $\underset{\cdot}{I} = 0{,}1$ [A], y su eficiencia es de 90 %. Las eficiencias de la antena receptora y de la antena transmisora 2 son 100 %. La antena receptora está separada de la antena transmisora 2 por una pared que absorbe el 100 % de la radiación electromagnética que incide sobre ella. Ambas antenas están conectadas por una linea de transmisión sin pérdidas, con impedancia característica R_{rad}, que atraviesa el muro.



Para esta situación, encuentre la magnitud de la densidad superficial de potencia promedio temporal P_{av} a 50 [m] de la antena transmisora 2, en la ubicación indicada en la figura.

Solución

Primero determinaremos la ganancia directiva $G_D(\phi, \theta)$ para el ángulo en que la antena receptora se le presenta a la antena transmisora 1, $\theta = 2\pi/3$. Recordamos que el fasor del campo eléctrico a una distancia R producido por un dipolo de longitud total $2h$ alimentado por una corriente sinusoidal de frecuencia ω y amplitud fasorial $\underset{\cdot}{I}$ está dado por

$$\underset{\cdot}{\boldsymbol{E}}(R, \phi, \theta) = j \frac{60\underset{\cdot}{I}}{R} \mathrm{e}^{-j\beta R} \frac{\cos(\beta h \cos\theta) - \cos(\beta h)}{\sin\theta} \; \hat{\boldsymbol{a}}_\theta \tag{1}$$

Reemplazando $\beta h = 3\pi/2$ obtenemos

$$\underset{\cdot}{\boldsymbol{E}}(R, \phi, \theta) = j \frac{60\underset{\cdot}{I}}{R} \mathrm{e}^{-j\beta R} \frac{\cos(\frac{3\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta} \; \hat{\boldsymbol{a}}_\theta \tag{2}$$

con lo que la magnitud de la densidad de potencia promedio a una distancia R de la antena transmisora 1 es

$$P_{av}(R, \phi, \theta) = \frac{1}{2\eta_0} \left|\underset{\cdot}{\boldsymbol{E}}\right|^2 = \frac{I^2}{2\eta_0} \left[\frac{60}{R} \frac{\cos(\frac{3\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}\right]^2 = \frac{15 I^2}{\pi R^2} \cdot \left[\frac{\cos(\frac{3\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}\right]^2 \tag{3}$$

Por otro lado, para la misma corriente I, la potencia total radiada es

$$P_r = \frac{1}{2} R_{rad} I^2 \tag{4}$$

Luego, la ganancia directiva de la antena hacia/desde una orientación (ϕ, θ) es

$$G_D(\phi,\theta) = \frac{4\pi R^2 P_{av}(R,\phi,\theta)}{P_r} = \frac{4\pi R^2 \frac{15I^2}{\pi R^2} \cdot \left[\frac{\cos(\frac{3\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}\right]^2}{\frac{1}{2}R_{rad}I^2} = \frac{60}{111}\left[\frac{\cos(\frac{3\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}\right]^2 \tag{5}$$

Evaluando en $\theta = 2\pi/3$, se tiene que

$$G_D(\phi, \theta = \tfrac{2\pi}{3}) = \frac{60}{111} \cdot \left[\frac{\cos(-\frac{3\pi}{4})}{\sqrt{3}/2}\right]^2 = \frac{60}{111} \cdot \left[\frac{-1/\sqrt{2}}{\sqrt{3}/2}\right]^2 = \frac{40}{111} \qquad \textbf{<10 ptos>}$$

Como la antena transmisora 2 no tiene pérdidas, su impedancia circuital es R_{rad}. Ésto, sumado al hecho que la línea de transmisión posee la mimsa impedancia caractarística y no presenta pérdidas, implica que la antena transmisora 2 se comporta como una carga adaptada a la antena receptora. Por lo tanto, la potencia eléctrica radiada por la antena transmisora 2, P_{rad2}, será la potencia electrica extraída de la antena receptora. Entonces, utilizando la ecuación de Friis,

$$P_{rad2} = P_{rad1} G_D(\phi, \tfrac{3\pi}{2}) G_D(\phi, \tfrac{3\pi}{2}) \left(\frac{\lambda}{4\pi L_1}\right)^2, \qquad \textbf{<5 ptos>} \tag{6}$$

donde

$$P_{rad1} = \frac{1}{2} R_{rad} I^2 = 11 \times 10^{-1} \quad \text{[W]} \qquad \textbf{<10 ptos>}$$

es la potencia radiada por la antena transmisora 1. Reemplazando,

$$P_{rad2} = 111 \times 10^{-2} \left(\frac{40}{111} \cdot \frac{1}{4\pi 400}\right)^2 = \frac{10^{-4}}{1776\pi^2} \quad \text{[W]} \qquad \textbf{<10 ptos>} \tag{7}$$

Para determinar P_{av} a 50 [m] de la antena transmisora 2, obtenemos $G_D(\phi, \theta = \frac{\pi}{2})$ a partir de (5)

$$G_D(\phi, \tfrac{\pi}{2}) = \frac{60}{111}. \qquad \textbf{<10 ptos>}$$

Con esto se llega directamente al resultado final:

$$\begin{aligned} P_{av} &= \frac{P_{rad2} G_D(\phi, \frac{\pi}{2})}{4\pi L_2^2} = \frac{10^{-4}}{1776\pi^2} \cdot \frac{60}{111} \cdot \frac{1}{4\pi \times 50^2} = \frac{10^{-7}}{296 \times 111\pi^3} = \frac{10^{-7}}{32856\pi^3} \\ &= 9{,}816 \times 10^{-14} \quad \text{[W/m}^2\text{]} \quad \textbf{<5 ptos>} \end{aligned}$$