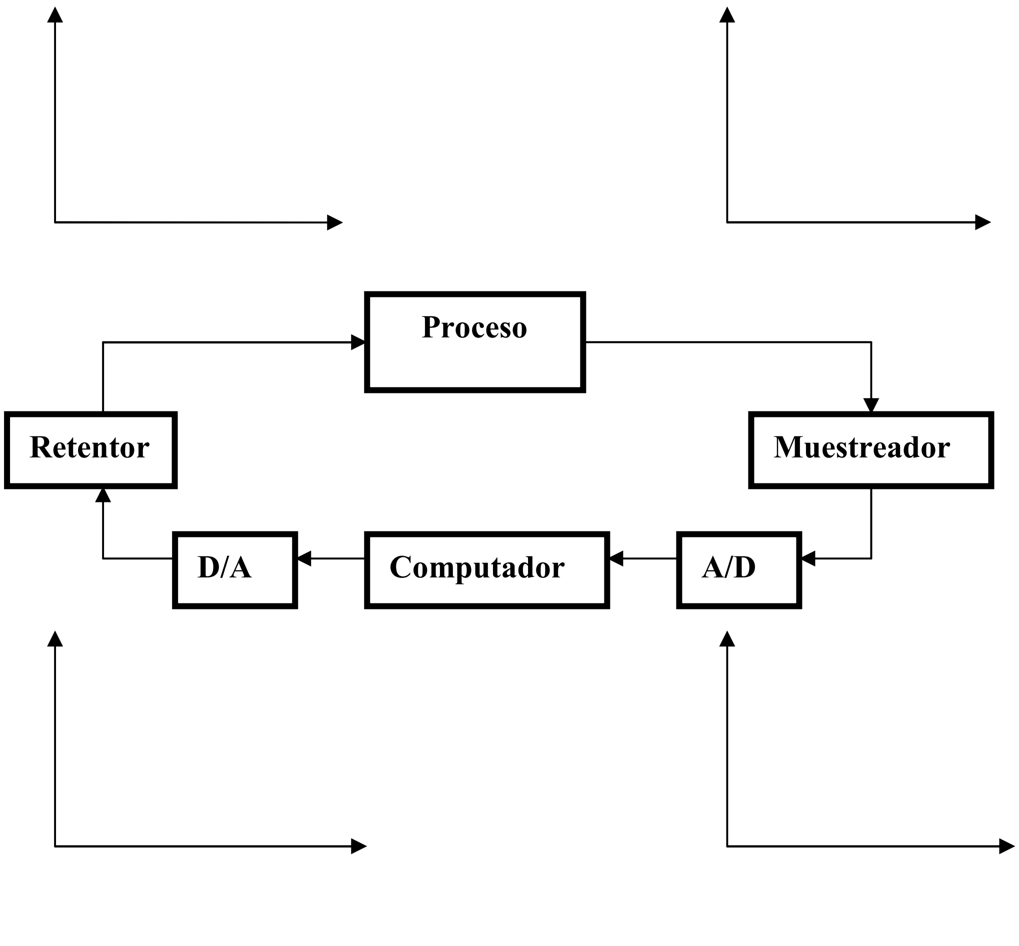
SISTEMAS DISCRETOS

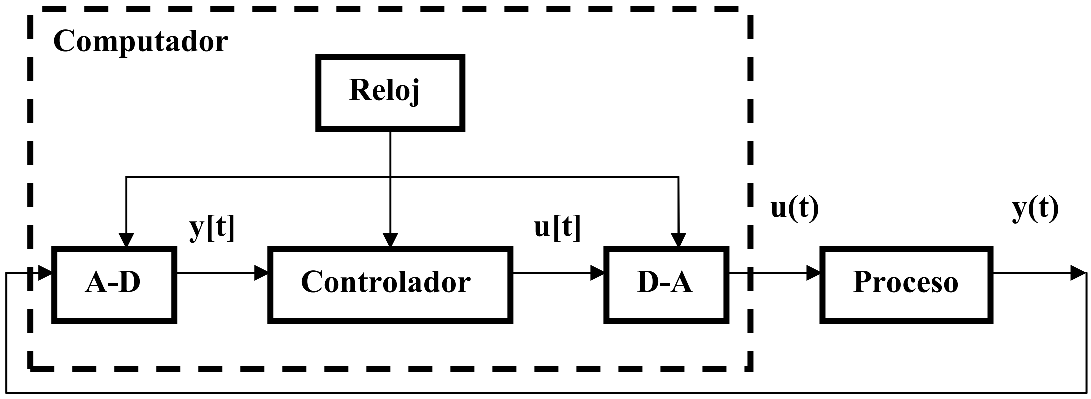
1. ¿Qué son?

- Son sistemas que trabajan con datos muestreados
- Estos sistemas son controlados por computador
- Los controladores se desarrollan en computadores

2. Ejemplo de datos muestreados



3. Control por computador



4. Tipo de ecuación discreta

Al trabajar con computadores aparecen ecuaciones recursivas del tipo:

$y(t) = a\, y(t-h) + b\, u(t-h)$

Donde a, b, h son constantes, u(t) es el estímulo, y(t) es la respuesta, h es el período de muestreo y t puede tomar los valores h, 2h, 3h, …..

Interesa conocer las variables sólo en los instantes
t = h, 2h, …., y la condición inicial es y(-h).

- **TRANSFORMADA ZETA.**

1. Cualidades.

- Análisis de sistemas estables e inestables.
- Aplicable a señales no acotadas.
- Considera las condiciones iniciales.
- La **Ecuación Recursiva del Sistema** (ERS) se transforma en una ecuación algebraica.

2. Definición de Transformada Zeta

Sea f[t] una función de tiempo discreto. Con $t \in \mathbf{Z}_0^+$

- Directa

$$Z\{f[t]\} = F[z] = \sum_{t=o}^{\infty} f[t] z^{-t}$$

- Inversa

$$Z^{-1}\{F[z]\} = f[t] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F[z] z^{t-1} dz$$

- Para que exista la transformada es suficiente:

$$|f[t]| \le k \rho^t \quad \forall t \ge 0 \; ; \; k < \infty$$

3. Propiedades de la Transformada Zeta

- Linealidad

$$Z\left\{\alpha\, y_1[t] + \beta\, y_2[t]\right\} = \alpha\, Y_1[z] + \beta\, Y_2[z]$$

$$Z^{-1}\left\{\alpha\, Y_1[z] + \beta\, Y_2[z]\right\} = \alpha\, y_1[t] + \beta\, y_2[t]$$

$$\alpha ; \beta \in C$$

- Escalamiento en z

$$Z\left\{\alpha^{t}\, y[t]\right\} = Y\left[\frac{z}{\alpha}\right] \qquad \alpha > 0$$

- Conjugación

$$Z\left\{y^{*}[t]\right\} = Y^{*}[z^{*}] \qquad \alpha > 0$$

- Desplazamiento en t

Retardo en t_o

$$Z\{y[t-t_o]\} = z^{-t_o}\left(Y[z] + \sum_{l=1}^{t_o} y[-l]z^{l}\right)$$

Adelanto en t_o

$$Z\{y[t+t_o]\} = z^{t_o}\left(Y[z] - \sum_{l=0}^{t_0-1} y[l]z^{-l}\right)$$

- Suma acumulada

$$Z\left\{\sum_{l=o}^{t} y[l]\right\} = \frac{z}{z-1} Y[z]$$

- Derivada en z

$$Z\{t\, y[t]\} = -z\frac{dY[z]}{dz}$$

- Convolución en el tiempo

$$Z\{y_1[t]*y_2[t]\} = Y_1[z]\; Y_2[z]$$

en que

$$y_1[t]*y_2[t] = \sum_{l=0}^{t} y_1[l]\; y_2[t-l]$$

- Teorema del valor Inicial

$$\lim_{t\to 0+} y[t] = y[0] = \lim_{z\to\infty} Y[z]$$

- Teorema del valor Final

$$\lim_{t\to\infty} y[t] = \lim_{z\to 1} (z-1)Y[z]$$

con $y[\infty]$ definida

4. Aplicación a sistemas lineales

- Linealización

  Veamos el procedimiento mediante el siguiente ejemplo.

  Sea un sistema de tiempo discreto con entrada u[t] y salida y[t], donde el modelo de entrada-salida es la ecuación recursiva

$$y[t] + 0{,}5y[t-1]y[t-2] + 0{,}1u[t](y[t-2])^2 = (u[t-1])^3$$

La idea es obtener un modelo lineal en torno al punto de operación (u_Q, y_Q) y las variaciones de las variables en torno al punto de operación sean:

$$\Delta u[t] = u[t] - u_Q$$

$$\Delta y[t] = y[t] - y_Q$$

Usando las variables intermedias, para generalizar:

$x_1[t] = y[t]$
$x_2[t] = y[t-1]$
$x_3[t] = y[t-2]$
$x_4[t] = u[t]$
$x_5[t] = u[t-1]$

Tenemos:

$$x_1[t] + 0{,}5x_2[t]x_3[t] + 0{,}1x_4[t](x_3[t])^2 = (x_5[t])^3$$

Expandir en serie de Taylor y usar las aproximaciones de primer orden.

$(x_1[t] - x_{1Q}) + 0{,}5x_{2Q}\,(x_3[t] - x_{3Q}) + 0{,}5x_{3Q}\,(x_2[t] - x_{2Q}) +$

$2*0{,}1x_{4Q}\,x_{3Q}\,(x_3[t] - x_{3Q}) + 0{,}1(x_{3Q})^2(x_4[t] - x_{4Q}) =$

$3(x_{5Q})^2(x_5[t] - x_{5Q})$

Usando las definiciones en el punto de equilibrio:

$\Delta y[t - i] = y[t - i] - x_{1Q}$

$\Delta u[t - j] = u[t - j] - x_{4Q}$

Tenemos:

$x_1[t] - x_{1Q} = \Delta y[t]$ $\quad (x_1[t] = y[t])$

$x_2[t] - x_{2Q} = \Delta y[t\text{-}1] + x_{1Q} - x_{2Q}$ $\quad (x_2[t] = y[t\text{-}1])$

$x_3[t] - x_{3Q} = \Delta y[t\text{-}2] + x_{1Q} - x_{3Q}$ $\quad (x_3[t] = y[t\text{-}2])$

$x_4[t] - x_{4Q} = \Delta u[t]$ $\quad (x_4[t] = u[t])$

$x_5[t] - x_{5Q} = \Delta u[t\text{-}1] + x_{4Q} - x_{5Q}$ $\quad (x_5[t] = u[t\text{-}1])$

En el punto de equilibrio se cumple:

$x_{1Q} = x_{2Q} = x_{3Q} = y_Q$

$x_{4Q} = x_{5Q} = u_Q$

$y[t] = y[t\text{-}1] = y[t\text{-}2] = y_Q$

$u[t] = u[t\text{-}1] = u_Q$

Por lo tanto, en este ejemplo:

$$y[t] + 0,5y[t-1]y[t-2] + 0,1u[t](y[t-2])^2 = (u[t-1])^3$$

Se debe cumplir:

$$y_Q + 0,5(y_Q)^2 + 0,1u_Q\,(y_Q)^2 = (u_Q)^3$$

El modelo lineal resultante tiene la forma:

$$\Delta y[t] + c_1\,\Delta y[t-1] + c_2\,\Delta y[t-2] = d_0\,\Delta u[t] + d_1\,\Delta u[t-1]$$

Observaciones:

- Cada señal retardada se debe asociar a una variable x_i.
- El punto de equilibrio debe satisfacer la ecuación NO lineal original.
- El punto de equilibro se elige en que las señales, $u[t] = u_Q$ e $y[t] = y_Q$, son constantes para todo instante t.
- Cuando el modelo NO lineal está descrito por dos o más ecuaciones, las coordenadas del punto de equilibrio deben satisfacer el conjunto de ecuaciones simultaneas.
- El punto de equilibrio se calcula a partir del modelo algebraico, al reemplazar las señales involucradas, por una constante a calcular con independencia del retardo que ella exhiba.

- Representación general:

$$y[t] + a_{n-1}y[t-1] + ...a_1 y[t-n+1] + a_0 y[t]$$
$$= b_m u[t] + b_{m-1}u[t-1] + ... + b_0 u[t-m]$$

donde $m < n$

$u[t]$ es la entrada

$y[t]$ es la salida

Aplicando la transformada Zeta a ambos lados de la ERS

$$Y[z] + a_{n-1}z^{-1}Y[z] + ...a_1 z^{-n+1}Y[z] + a_0 z^{-n}Y[z] =$$

$$b_m U[z] + b_{m-1}z^{-1}U[z] + ... + b_0 z^{-m}U[z]$$

$$Y[z] = \frac{b_m + b_{m-1}z^{-1} + ... + b_o z^{-m}}{1 + a_{n-1}z^{-1} + ... + a_o z^{-n}} \; U[z] \; = \; \frac{B[z]}{A[z]} \; U[z]$$

luego

$H[z] = \dfrac{B[z]}{A[z]}$ es la Función de Transferencia en Zeta

5. Definición de parámetros

Se supone que B[z] y A[z] no tienen factores comunes.

a) Las m raíces de la ecuación $B[z]=0$ son los **ceros** del sistema.
b) Las n raíces de la ecuación $A[z]=0$ son los **polos** del sistema.

c) Si A[z]=0 tiene n_k raíces en $z = \lambda_k$, decimos que el polo λ_k tiene multiplicidad n_k.
d) La diferencia **(n-m)** se denomina **grado relativo** del sistema.
e) Si **m < n** decimos que el sistema es **estrictamente propio**. El grado relativo es positivo.
f) Si **m > n** decimos que el sistema es **impropio**. El grado relativo es negativo.
g) Si **m = n** decimos que el sistema es **bipropio**. El grado relativo es cero.
h) Si **m** $\leq$ **n** decimos que el sistema es **propio**.

6. Relación entre s y z.

$$Z\{\delta(t-t_o)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(kT - t_o) z^{-k} = z^{-(\frac{t_o}{T})}$$

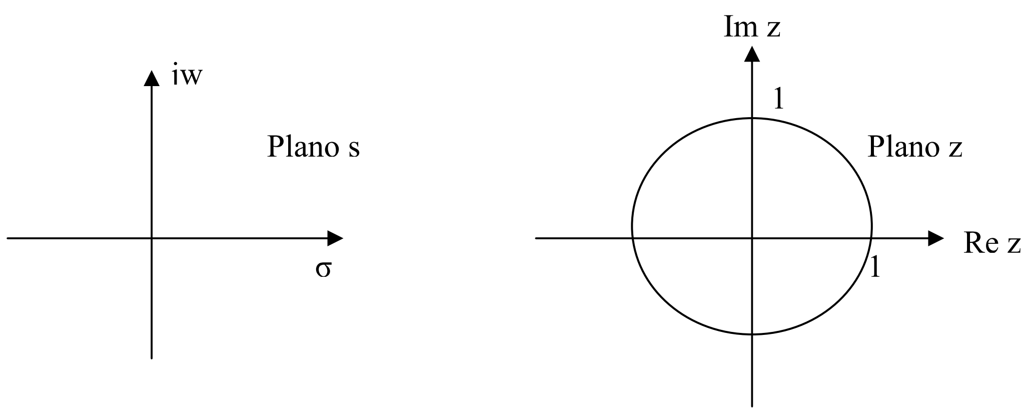
con T = tiempo de muestreo

$$\pounds\{\delta(t-t_o)\} = e^{-s\,t_o}$$

$$e^{-s\,t_o} = z^{-(\frac{t_o}{T})}$$

$$z = e^{sT} \quad \text{usando } s = \sigma + jw$$

$$z = e^{\sigma T} e^{jwT}$$



£

7. Polos y ceros.

- **Función de transferencia estable**, si tiene sus ceros y polos al interior del disco unitario en el plano complejo z.
- **Función de transferencia inestable**, si tiene al menos un polo fuera o sobre el disco unitario.
- **Función de transferencia de fase mínima**, si tiene sus ceros al interior del disco unitario.
- **Función de transferencia de fase no mínima**, si tiene al menos un cero fuera del disco unitario.
- **Polos rápidos** están más cercas del origen del plano z. Tienen respuesta transitoria más rápida.
- **Polos lentos o dominantes** están más cerca de la circunferencia unitaria (límite de estabilidad).
- **Los ceros** afectan **la proporción** en que **los polos** afectan la salida.
- **Ceros rápidos** están más alejados del límite de estabilidad que los polos dominantes.
- **Ceros lentos** están más cerca del límite de estabilidad que los polos dominantes.