

Procesamiento Digital de Imágenes

Pablo Roncagliolo B.
Nº 09



TRATAMIENTO DE IMÁGENES

EN EL DOMINIO DE LAS FRECUENCIAS

Transformada de Fourier



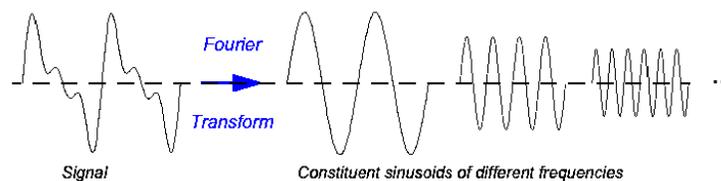
A principios del siglo XIX, Joseph Fourier indica que toda función periódica puede ser expresada como una suma infinita de senos y cosenos de distintas frecuencias.

El análisis de Fourier de una señal permite determinar sus frecuencias, pero a costa de perder la información de tipo temporal. (no dice cuando aparece cada frecuencia).

prb@2007

3

Transformada de Fourier



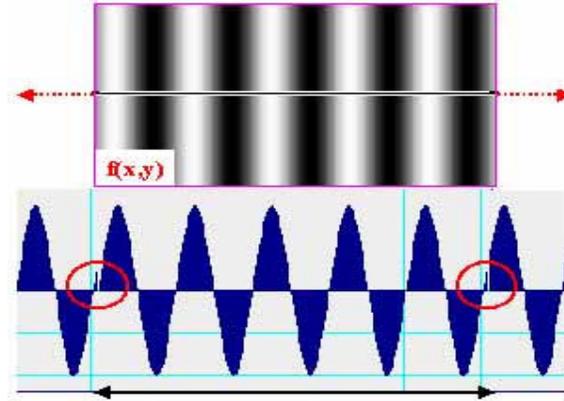
En el caso de las imágenes, las “señales” corresponden a los niveles de gris o intensidad de las diferentes filas o columnas de la matriz de la imagen.

El eje del tiempo se “reemplaza” por los ejes X-Y

prb@2007

4

Transformada de Fourier



prb@2007

5

Transformada de Fourier



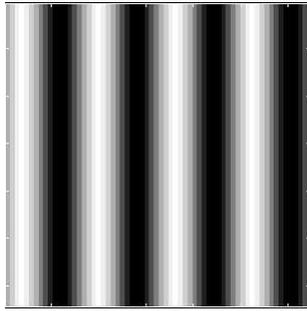
prb@2007

6

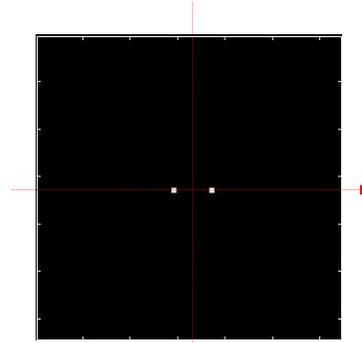
Transformada de Fourier



Imagen de grises con variación sinusoidal de intensidad a lo largo del eje x con período de 16 píxeles.



*Frecuencia: 1 ciclo / 16 píxel
... 0.0625 Hz**



Transformada de Fourier, que muestra la frecuencia presente en el eje x (positiva y negativa)

prb@2007

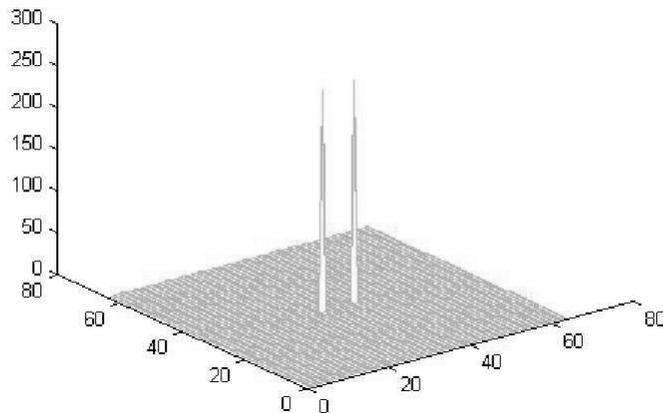
Hz = ciclos/píxel*

7

Transformada de Fourier



Transformada de Fourier en formato de “manto”



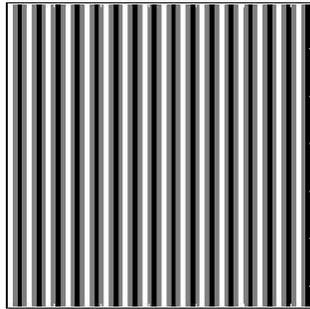
prb@2007

8

Transformada de Fourier



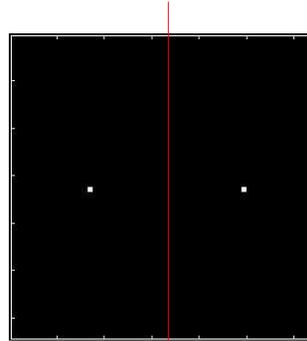
Imagen de grises con variación sinusoidal de intensidad a lo largo del eje x con período de 4 píxeles.



*Frecuencia: 1 ciclo / 4 píxel
... 0.25 Hz**

Hz = ciclos/píxel*

prb@2007



Transformada de Fourier, que muestra la frecuencia presente en el eje x (positiva y negativa)

9

Transformada de Fourier



Imagen con una discontinuidad a lo largo del eje X

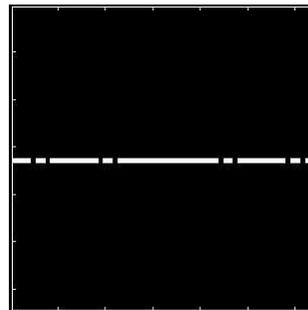
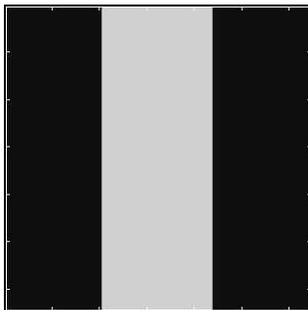


Imagen binarizada de la transformada de Fourier. Se observa como existen frecuencias a lo largo de "u"

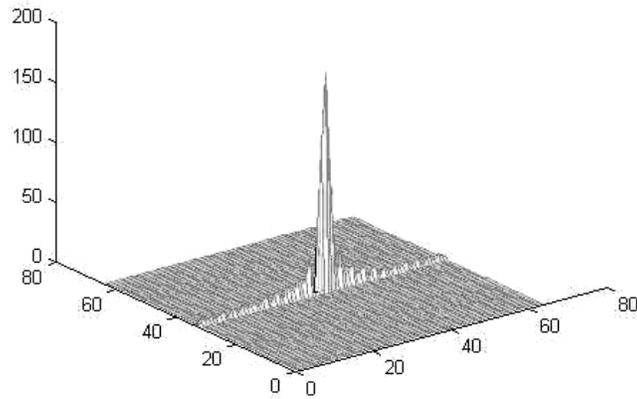
prb@2007

10

Transformada de Fourier



Vista del “manto” de la transformada de Fourier de una discontinuidad en el eje X



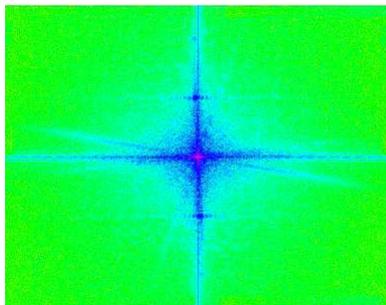
prb@2007

11

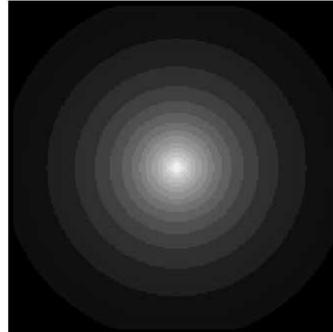
Transformada de Fourier



TF de una imagen



TF de un Filtro



prb@2007

12

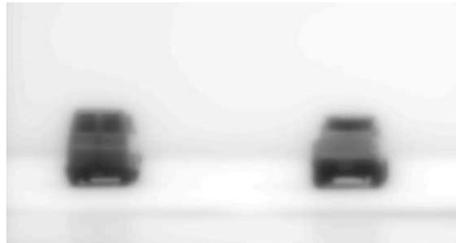
Transformada de Fourier



Imagen original



*TF inversa de la convolución de
TF original con el filtro*



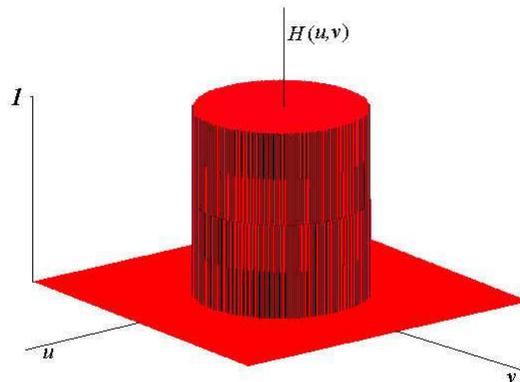
prb@2007

13

Transformada de Fourier



Imagen de TF de un filtro pasa bajos

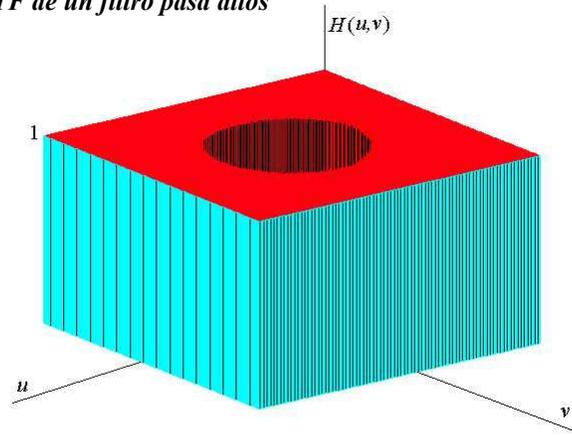


prb@2007

14

Transformada de Fourier

Imagen de TF de un filtro pasa altos

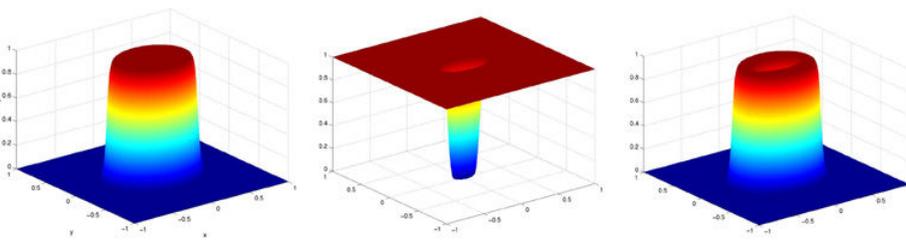


prb@2007

15

Transformada de Fourier

Filtros pasa banda:



Se pueden construir en base a un FPB y un FPA.

prb@2007

16

Tratamiento de Imágenes: Dominio Frecuencias:

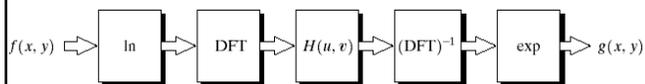


FIGURE 4.31
Homomorphic filtering approach for image enhancement.

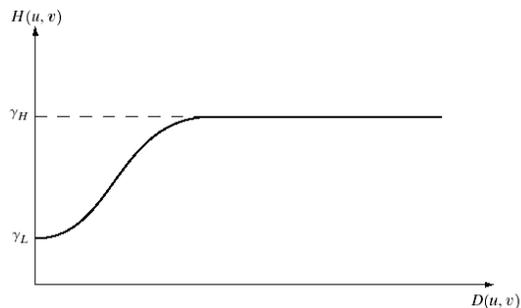


FIGURE 4.32
Cross section of a circularly symmetric filter function. $D(u, v)$ is the distance from the origin of the centered transform.

prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

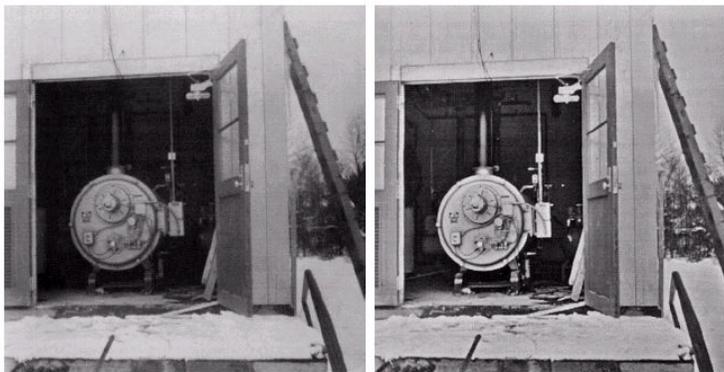
17

Tratamiento de Imágenes: Dominio Frecuencias:



a b

FIGURE 4.33
(a) Original image. (b) Image processed by homomorphic filtering (note details inside shelter). (Stockham.)



prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

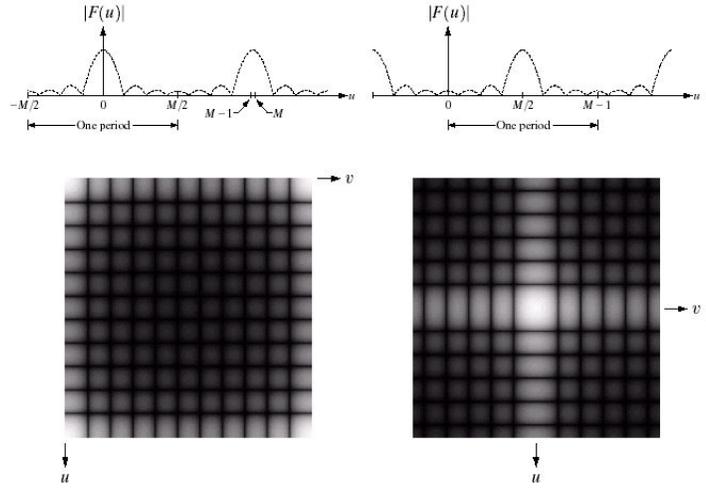
18

Tratamiento de Imágenes: Dominio Frecuencias:



a b
c d

FIGURE 4.34
 (a) Fourier spectrum showing back-to-back half periods in the interval $[0, M - 1]$.
 (b) Shifted spectrum showing a full period in the same interval.
 (c) Fourier spectrum of an image, showing the same back-to-back properties as (a), but in two dimensions.
 (d) Centered Fourier spectrum.



prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

19

Tratamiento de Imágenes: Dominio Frecuencias:

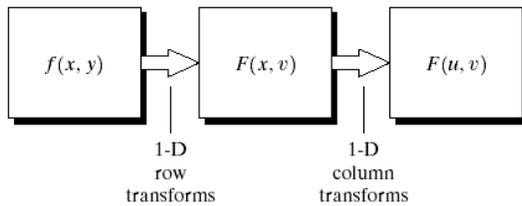


FIGURE 4.35
 Computation of the 2-D Fourier transform as a series of 1-D transforms.

prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

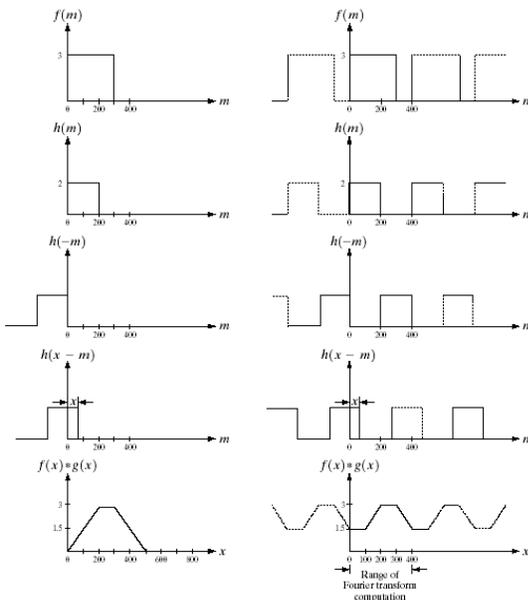
20

Tratamiento de Imágenes: Dominio Frecuencias:



a f
b g
c h
d i
e j

FIGURE 4.36 Left: convolution of two discrete functions. Right: convolution of the same functions, taking into account the implied periodicity of the DFT. Note in (j) how data from adjacent periods corrupt the result of convolution.



prb@2007

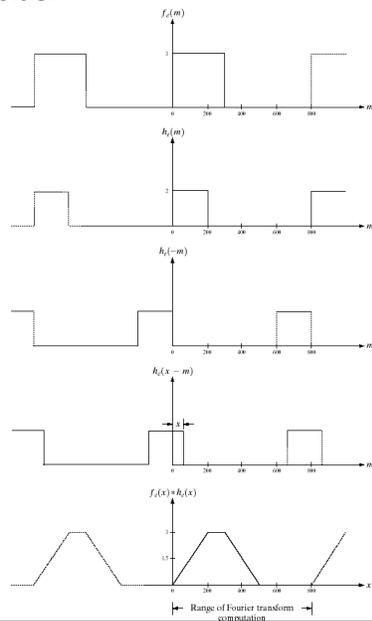
21

Tratamiento de Imágenes: Dominio Frecuencias:



a
b
c
d
e

FIGURE 4.37 Result of performing convolution with extended functions. Compare Figs. 4.37(c) and 4.36(e).



prb@2007

22

Tratamiento de Imágenes: Dominio Frecuencias:

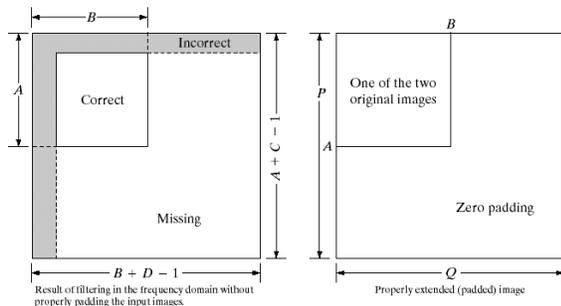
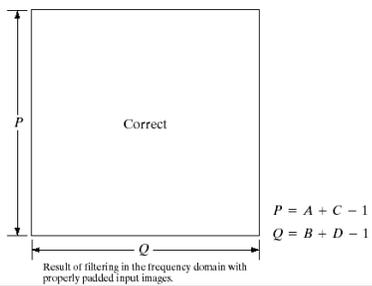


FIGURE 4.38 Illustration of the need for function padding. (a) Result of performing 2-D convolution without padding. (b) Proper function padding. (c) Correct convolution result.



23

Tratamiento de Imágenes: Dominio Frecuencias:



FIGURE 4.39 Padded lowpass filter in the spatial domain (only the real part is shown).

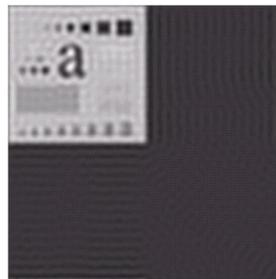


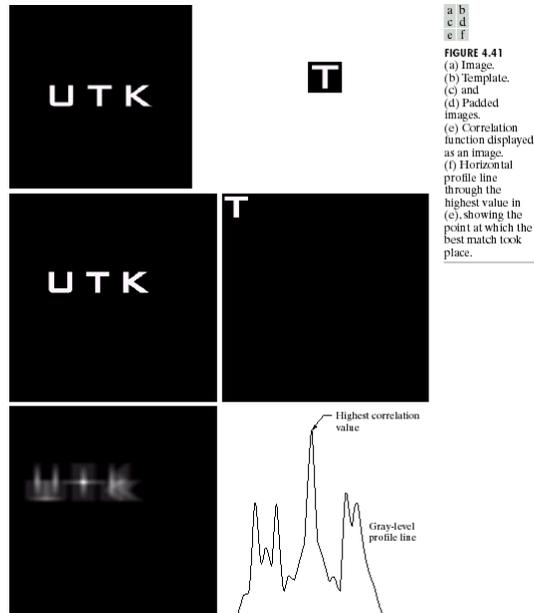
FIGURE 4.40 Result of filtering with padding. The image is usually cropped to its original size since there is little valuable information past the image boundaries.

prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

24

Tratamiento de Imágenes: Dominio Frecuencias:



25

Transformada de Fourier



$$F(u, v) = \frac{1}{nc \cdot nf} \sum_{c=1}^{nc} \sum_{f=1}^{nf} I(c, f) \cdot \exp(-2\pi i(u \cdot c / nc + v \cdot f / nf))$$

generalmente se visualiza el módulo :

$$|F(u, v)| = \sqrt{[\text{Re}(u, v)]^2 + [\text{Im}(u, v)]^2}$$

prb@2007

26

Transformada de Fourier



$$F(u, v) = \frac{1}{nc \cdot nf} \sum_{c=1}^{nc} \sum_{f=1}^{nf} I(c, f) \cdot \exp(-2\pi i(u \cdot c / nc + v \cdot f / nf))$$

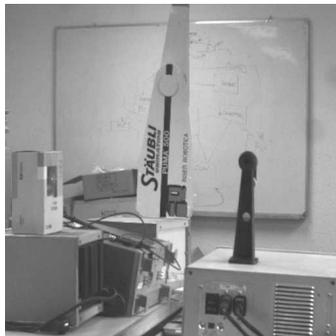
Expresión periódica de la Transformada de Fourier:

$$F(u, v) = \frac{1}{nc \cdot nf} I(c, f) [\cos(2\pi(u \cdot c / nc + v \cdot f / nf)) + i \sin(2\pi(u \cdot c / nc + v \cdot f / nf))]$$

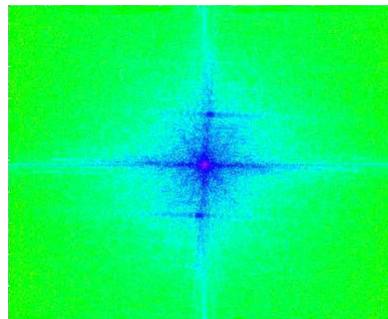
prb@2007

27

Transformada de Fourier



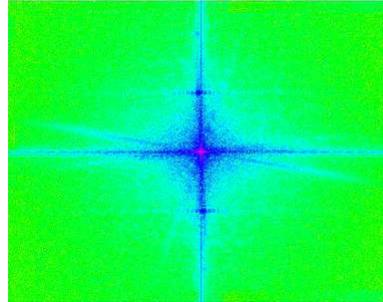
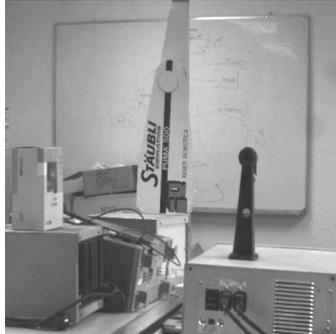
El rango dinámico del espectro de Fourier es mayor al rango típico de las imágenes (256). Para una mejor visualización se puede utilizar el logaritmo de la transformada.



prb@2007

28

Transformada de Fourier



$$FF(u,v) = 255 * \log(1 + |F(u,v)|) / \max(\log(1 + |F(u,v)|))$$

Normalización de la matriz en el rango 0-255

prb@2007

29

Transformada de Fourier



Valor Medio:

$$F(u, v) = \frac{1}{nc \cdot nf} \sum_{x=0}^{nc-1} \sum_{y=0}^{nf-1} f(x, y) \cdot \exp(-2\pi i(ux / nc + vy / nf))$$

evaluando para $u, v = 0, 0$:

$$F(0, 0) = \frac{1}{nc \cdot nf} \sum_{x=0}^{nc-1} \sum_{y=0}^{nf-1} f(x, y) \cdot \exp(0)$$

$$F(0, 0) = \frac{1}{nc \cdot nf} \sum_{x=0}^{nc-1} \sum_{y=0}^{nf-1} f(x, y) = \text{promedio}$$

prb@2007

30

Transformada de Fourier



Algoritmo:

Sin embargo, existe una implementación más eficiente de la transformada denominada FFT (Transformada rápida de Fourier)

```
double A[][xydim];
double freal[][xydim];
double fimag[][xydim];
double phi, sum1, sum2;

for (int i = 0; i <N; i++)
  for (int j = 0; j <N; j++) {
    sum1 = 0;
    sum2 = 0;
    for (int x = 0; x <N; x++)
      for (int y = 0; y <N; y++) {
        phi = 2 * PI * (i * x + j * y) / N;
        sum1 = sum1 + A[x][y] * cos(phi);
        sum2 = sum2 + A[x][y] * sin(phi);
      }

    freal[i][j] = sum1 / N;
    fimag[i][j] = -sum2 / N;
  }
```

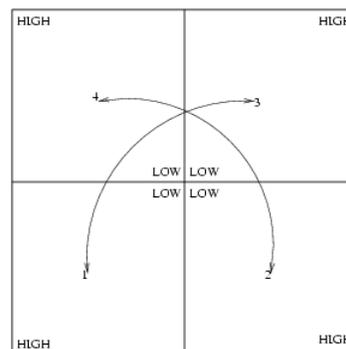
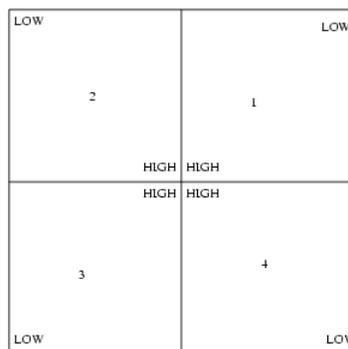
prb@2007

31

Transformada de Fourier



Algoritmo:



prb@2007

32

Tratamiento de Imágenes: Dominio Frecuencias:

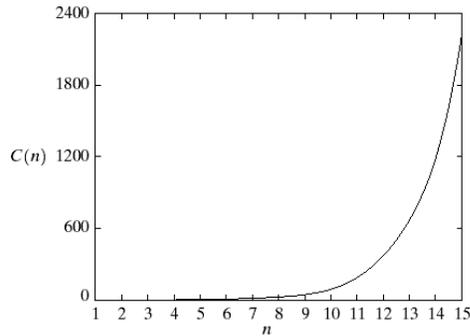


FIGURE 4.42
Computational advantage of the FFT over a direct implementation of the 1-D DFT. Note that the advantage increases rapidly as a function of n .

prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

33

Tratamiento de Imágenes: Dominio Frecuencias:



TABLE 4.1
Summary of some important properties of the 2-D Fourier transform.

Property	Expression(s)
Fourier transform	$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$
Inverse Fourier transform	$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$
Polar representation	$F(u, v) = F(u, v) e^{-j\phi(u, v)}$
Spectrum	$ F(u, v) = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}, \quad R = \text{Real}(F) \text{ and } I = \text{Imag}(F)$
Phase angle	$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$
Power spectrum	$P(u, v) = F(u, v) ^2$
Average value	$\bar{f}(x, y) = F(0, 0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$
Translation	$f(x, y) e^{j2\pi(u_0x/M + v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$ $f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi(u x_0/M + v y_0/N)}$ <p>When $x_0 = u_0 = M/2$ and $y_0 = v_0 = N/2$, then</p> $f(x, y) (-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$ $f(x - M/2, y - N/2) \Leftrightarrow F(u, v) (-1)^{u+v}$

Tratamiento de Imágenes: Dominio Frecuencias:



Conjugate symmetry	$F(u, v) = F^*(-u, -v)$ $ F(u, v) = F(-u, -v) $
Differentiation	$\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n} \Leftrightarrow (ju)^n F(u, v)$ $(-jx)^n f(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial^n F(u, v)}{\partial u^n}$
Laplacian	$\nabla^2 f(x, y) \Leftrightarrow -(u^2 + v^2)F(u, v)$
Distributivity	$\mathfrak{N}[f_1(x, y) + f_2(x, y)] = \mathfrak{N}[f_1(x, y)] + \mathfrak{N}[f_2(x, y)]$ $\mathfrak{N}[f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)] \neq \mathfrak{N}[f_1(x, y)] \cdot \mathfrak{N}[f_2(x, y)]$
Scaling	$af(x, y) \Leftrightarrow aF(u, v), f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{ ab } F(u/a, v/b)$
Rotation	$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad u = \omega \cos \varphi \quad v = \omega \sin \varphi$ $f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$
Periodicity	$F(u, v) = F(u + M, v) = F(u, v + N) = F(u + M, v + N)$ $f(x, y) = f(x + M, y) = f(x, y + N) = f(x + M, y + N)$
Separability	See Eqs. (4.6-14) and (4.6-15). Separability implies that we can compute the 2-D transform of an image by first computing 1-D transforms along each row of the image, and then computing a 1-D transform along each column of this intermediate result. The reverse, columns and then rows, yields the same result.

35

Tratamiento de Imágenes: Dominio Frecuencias:



Property	Expression(s)
Computation of the inverse Fourier transform using a forward transform algorithm	$\frac{1}{MN} f^*(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^*(u, v) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$ This equation indicates that inputting the function $F^*(u, v)$ into an algorithm designed to compute the forward transform (right side of the preceding equation) yields $f^*(x, y)/MN$. Taking the complex conjugate and multiplying this result by MN gives the desired inverse.
Convolution [†]	$f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) h(x - m, y - n)$
Correlation [†]	$f(x, y) \circ h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f^*(m, n) h(x + m, y + n)$
Convolution theorem [†]	$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) H(u, v);$ $f(x, y) h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * H(u, v)$
Correlation theorem [†]	$f(x, y) \circ h(x, y) \Leftrightarrow F^*(u, v) H(u, v);$ $f^*(x, y) h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \circ H(u, v)$

prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

36

Tratamiento de Imágenes: Dominio Frecuencias:



Some useful FT pairs:

Impulse $\delta(x, y) \Leftrightarrow 1$

Gaussian $A\sqrt{2\pi}\sigma e^{-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)} \Leftrightarrow A e^{-(u^2+v^2)/2\sigma^2}$

Rectangle $\text{rect}[a, b] \Leftrightarrow ab \frac{\sin(\pi ua)}{(\pi ua)} \frac{\sin(\pi vb)}{(\pi vb)} e^{-j\pi(ua+vb)}$

Cosine $\cos(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow$
 $\frac{1}{2} [\delta(u + u_0, v + v_0) + \delta(u - u_0, v - v_0)]$

Sine $\sin(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow$
 $j \frac{1}{2} [\delta(u + u_0, v + v_0) - \delta(u - u_0, v - v_0)]$

† Assumes that functions have been extended by zero padding.

Transformada de Fourier



En Matlab:

```
F = fft2(IM);  
  
% Se debe realizar un "swap" entre los cuadrantes  
% para visualizar de forma estándar  
  
F2 = fftshift(F);  
  
% generalmente se visualiza el valor absoluto  
  
S = abs(F2);  
imshow(S, []);  
  
% para mejorar rango dinámico de visualización  
  
S2 = log(1+S);  
imshow(S2, []);
```

Transformada de Fourier



En Matlab:

```
F = fft2(IM);  
  
% Se debe realizar un "swap" entre los cuadrantes  
% para visualizar de forma estándar  
  
F2 = fftshift(F);  
  
% generalmente se visualiza el valor absoluto  
  
S = abs(F2);  
imshow(S, []);  
  
% para mejorar rango dinámico de visualización  
  
S2 = log(1+S);  
imshow(S2, []);
```

39