

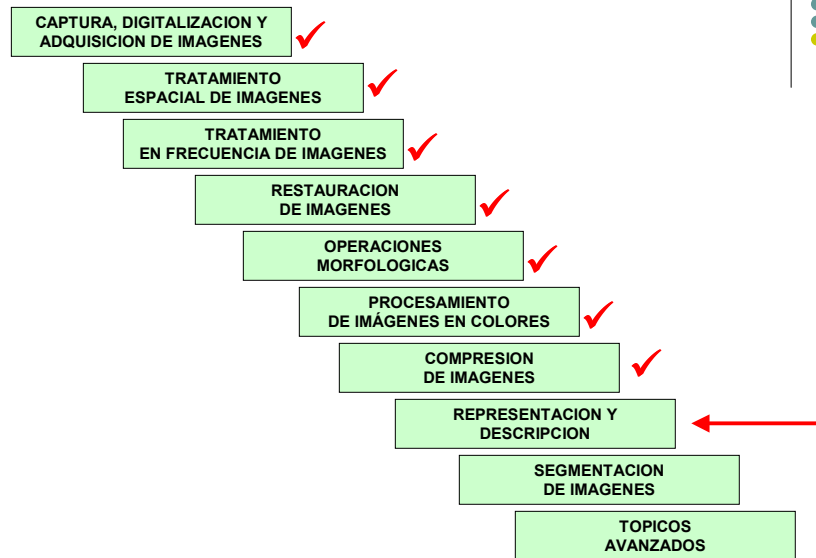
Procesamiento Digital de Imágenes

Pablo Roncagliolo B.

Nº 17



Orden de las clases...



prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

2



DETECCION DE ESQUINAS

prb@2007

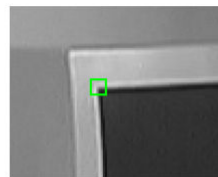
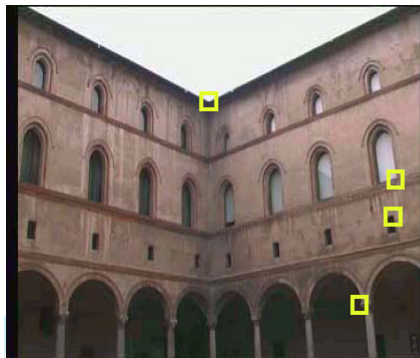
Imágenes: Gonzalez&Wood

3

Extracción de esquinas



Nivel semántico: intersección de dos bordes rectos → sólo en imágenes ideales.



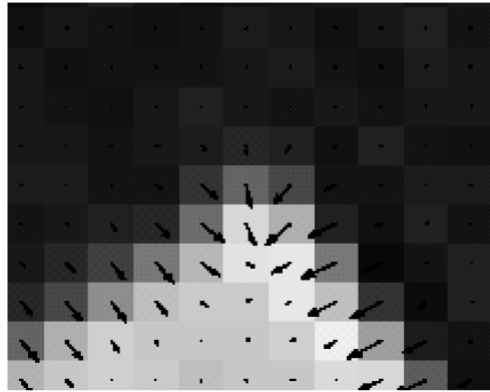
prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

4

Extracción de esquinas

¿Qué caracteriza a una esquina?



Se observa que en los “bordes” el gradiente aumenta... ¿pero qué ocurre en la esquina?

prb@2007

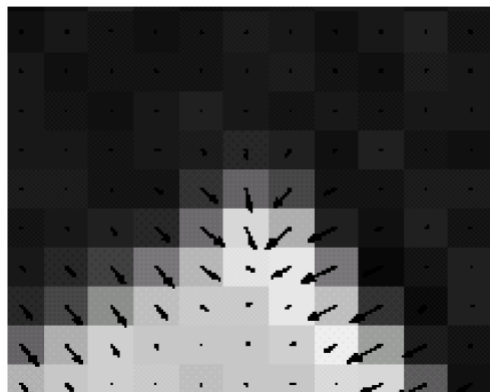
Imágenes: Gonzalez&Wood

5



Extracción de esquinas

Una esquina se caracteriza por un abrupto cambio en la dirección del gradiente.



prb@2007

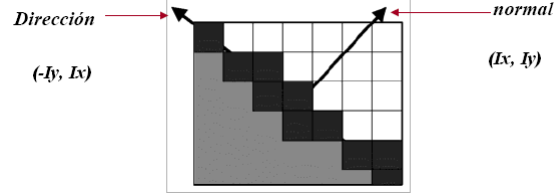
Imágenes: Gonzalez&Wood

6



Extracción de esquinas

Sea



$I(x,y)$ = imagen

$I_x(x,y), I_y(x,y)$ = Imágenes “gradientes” en eje x e y (derivada en x e y)

$Vg=(I_x, I_y)$... el vector gradiente

$Vmin=(-I_y, I_x)$... el vector con mínima variación (borde)

$\theta = \tan^{-1}(I_y / I_x)$ = razón de gradientes... dirección del gradiente...

θ_x y θ_y las derivadas de la dir. del gradiente... entonces:

$$K = (\theta_x, \theta_y) \cdot Vminm > U$$

K representa la variación de la dirección del gradiente en la dirección de **Vmin**.

Extracción de esquinas



$$\frac{\partial \tan^{-1}(u)}{\partial x} = \frac{1}{u^2 + 1}$$

$$\frac{\partial \tan^{-1} f(x)}{\partial x} = \frac{1}{1 + f(x)^2} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \tan^{-1}\left(\frac{I_y}{I_x}\right)}{\partial x} = \frac{1}{\frac{I_y^2}{I_x^2} + 1} \cdot \frac{I_x I_{xy} - I_y I_{xx}}{I_x^2} = \frac{I_x I_{xy} - I_y I_{xx}}{I_x^2 + I_y^2}$$

$$\frac{\partial \tan^{-1}\left(\frac{I_y}{I_x}\right)}{\partial y} = \frac{1}{\frac{I_y^2}{I_x^2} + 1} \cdot \frac{I_x I_{yy} - I_y I_{yx}}{I_x^2} = \frac{I_x I_{yy} - I_y I_{yx}}{I_x^2 + I_y^2}$$

prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

8

Extracción de esquinas



$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{I_x I_{xy} - I_y I_{xx}}{I_x^2 + I_y^2}, \frac{I_x I_{yy} - I_y I_{yx}}{I_x^2 + I_y^2} \right) \cdot \frac{(-I_y, I_x)}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} \\
 &= \left(\frac{I_x I_y I_{xy} - I_y^2 I_{xx}}{I_x^2 + I_y^2} + \frac{I_x^2 I_{yy} - I_x I_y I_{yx}}{I_x^2 + I_y^2} \right) \frac{1}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} \\
 &= \frac{I_x^2 I_{yy} + I_y^2 I_{xx} - 2 I_x I_y I_{yx}}{(I_x^2 + I_y^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

9

Extracción de esquinas 1



Este método habitual consiste en el uso de derivadas de segundo orden.

Consiste en la medición de la razón de cambio de la dirección del gradiente respecto de la magnitud del gradiente. (Kitchen&Rosenfeld)

$$E = \frac{f_{xx} f_y^2 + f_{yy} f_x^2 - 2 f_{xy} f_x f_y}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}} \geq U$$

prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

10

Extracción de esquinas 1



Las operaciones se realizan sobre cada píxel.
Para el calculo de las derivadas se utiliza la convolución con los siguientes filtros:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

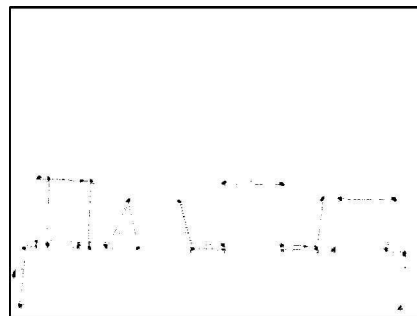
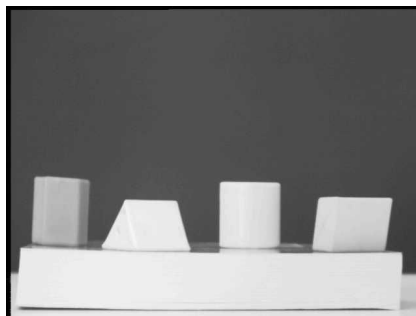
$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

11

Extracción de Esquinas 1



prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

12

Algoritmo



```
I=double(imread('figura.bmp'));
subplot(1,2,1); imshow(I);

DX=[-1 0 1;
     -1 0 1;
     -1 0 1];
DY=[-1 -1 -1;
     0 0 0;
     1 1 1];

Ix=conv2(I,DX,'same');    Iy=conv2(I,DY,'same');
Ixx=conv2(Ix,DX,'same');  Iyy=conv2(Iy,DY,'same');
Ixy=conv2(Iy,DX,'same');

E=((Iy.^2).*Iyy+(Iy.^2).*Ixx-2*Ixy.*Ix.*Iy)./(Ix.^2+Iy.^2).^(3/2);

E=abs(E);E=255*(E/max(max(E)));
subplot(1,2,2);surf(E);
```

Extracción de esquinas 2

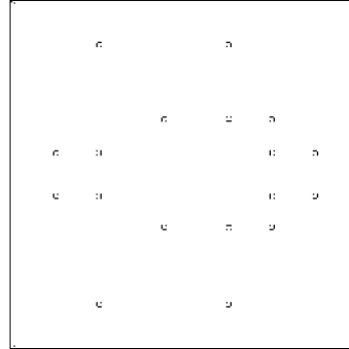
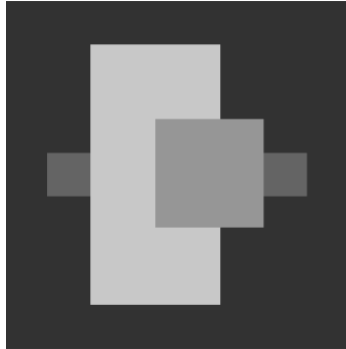


Otro método consiste en medir la curvatura Gaussiana de una determinada superficie (imagen).

La curvatura K se expresa en términos de derivadas parciales (Lipschutz):

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2} \geq U$$

Extracción de Esquinas 2



prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

15

Extracción de esquinas 3



Finalmente se pueden mencionar los métodos clásicos de detección de esquinas específicas. Consisten simplemente en la convolución con núcleos que “representen” la esquina buscada:

$$E_{\text{sup_der}} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -4 & 5 & 5 \\ -4 & -4 & -4 \end{bmatrix} \quad E_{\text{inf}} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -4 & 5 & -4 \\ -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

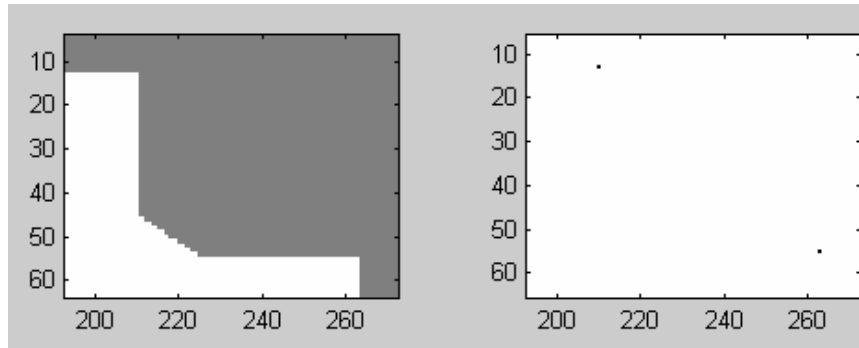
Son ocho posible rotaciones del núcleo.

prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

16

Extracción de esquinas 3



prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

17

Algoritmo



```
map1=(0:255)/255;
map=[map1' map1' map1'];
COLORMAP(map);
A1=double(imread('figura.bmp'));
subplot(2,2,1);
image(A1);

D1=[-4 5 5;
     -4 5 5;
     -4 -4 -4];

E=conv2(A1,D1,'same');

E=255*(E/max(max(E)));
E=255*(E<220);
subplot(2,2,2);image(E);
```

prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

18



DETECCION DE PUNTOS DE INTERÉS

Extracción de puntos de interés

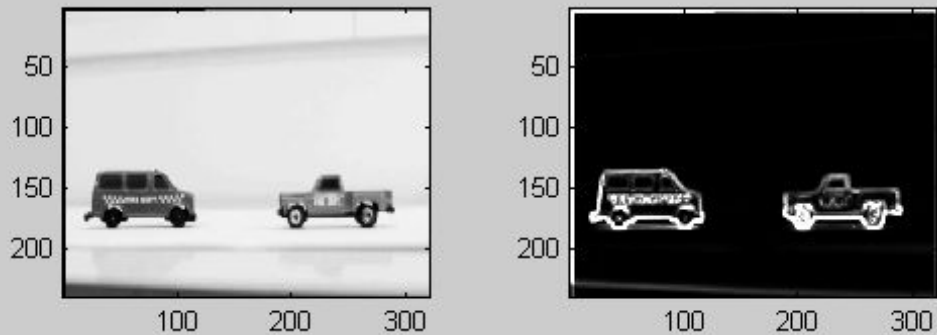


Los puntos de interés o zonas de interés, generalmente se delimitan por grupos de píxeles con una gran varianza.

$$VAR(x, y) = \sum_{i, j \in \text{vecinos}} [I(x, y) - I(x + i, y + j)]^2$$

El resultado se puede binarizar o “amplificar” para filtrar los “puntos de interés”.

Extracción de puntos de interés



prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

21

Algoritmo



```
map1=(0:255)/255;
map=[map1' map1' map1']; COLORMAP(map);
A1=double(imread('autos.bmp'));
subplot(2,2,1);image(A1);
[H,W]=size(A1);
V=A1;

D=2;
for x=1+D:W-D
    for y=1+D:H-D
        var=0;
        for xx=-D:D
            for yy=-D:D
                var=var+(A1(y,x)-A1(y+yy,x+xx))^2;
            end;
        end;
        V(y,x)=var;
    end;
end;

V=V-min(min(V)); V=255*(V/max(max(V))); %normaliza
V=V*6; %amplifica
subplot(2,2,2); image(V);
```

22



DETECCION DE LINEAS

prb@2007

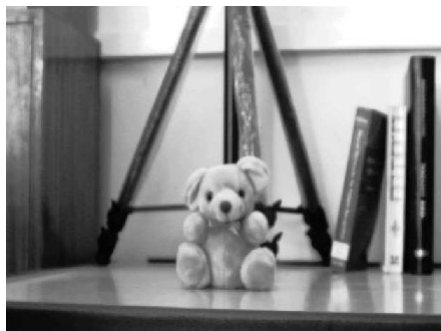
Imágenes: Gonzalez&Wood

23

Descripción de Líneas...



Generalmente en una imagen de bordes se desea “filtrar” ciertos bordes especiales, por ejemplo, dejar sólo las líneas rectas



prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

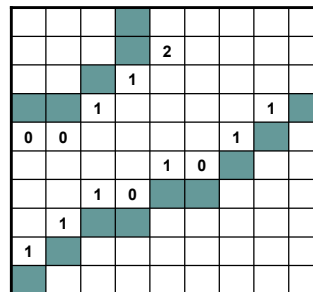
24

1. Códigos de Cadena



Un método corresponde a buscar “códigos de cadenas”. Corresponde a etiquetar los puntos de un borde, con el ángulo (índice) de su vecino siguiente, siguiendo el sentido del borde.

3	2	1
4		0
5	6	7



prb@2007

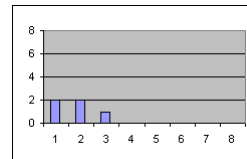
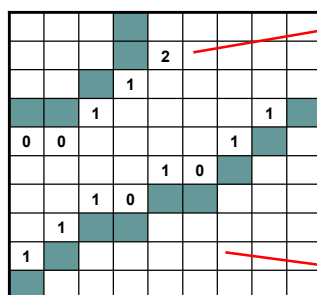
Imágenes: Gonzalez&Wood

25

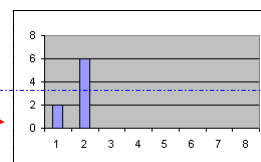
1. Códigos de Cadena



Para cada borde o segmento, luego de etiquetar con el número de vecino, se determina un histograma de los índices.



NO



SI

Si en dicho histograma existe algún índice que supere notablemente al resto, se puede considerar una recta.

prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

26

1. Códigos de Cadena



Algunas condiciones:

1.- Si el histograma tiene valores en más de 4 índices → no es recta

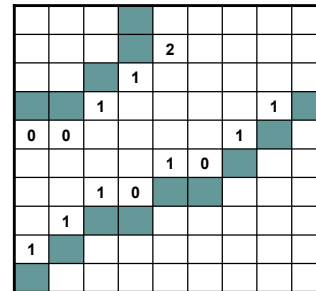
2.- Si el histograma tiene valores sólo de 1 índice → es una recta pura.

3.- Si el hist. tiene 2 barras.

Significativas:

.- Si son adyacentes, pero una supera notoriamente a la otra → es recta.

.- Si no son adyacentes, → no es recta.



prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

27

2. Ajuste de líneas: mínimos cuadrados



Para un conjunto de puntos se desea encontrar **a** y **b** tal que la siguiente expresión sea mínima:

$$\sum_{i=1}^n [(b + ax_i) - y_i]^2$$

Una solución para este problema clásico es derivando e igualando a cero para buscar el mínimo.

prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

28

2. Ajuste de líneas: mínimos cuadrados



$$\sum_{i=1}^n [(b + ax_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^n [(b + ax_i)^2 - 2(b + ax_i)y_i + y_i^2]$$

$$= \sum_{i=1}^n [b^2 + 2abx_i + a^2x_i^2 - 2by_i - 2ax_iy_i + y_i^2]$$

derivando parcialmente...

$$\frac{\partial}{\partial a} = 2b \sum_{i=1}^n x_i + 2a \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\frac{\partial}{\partial b} = 2b \cdot n + 2a \sum_{i=1}^n x_i - 2 \sum_{i=1}^n y_i$$

prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

29

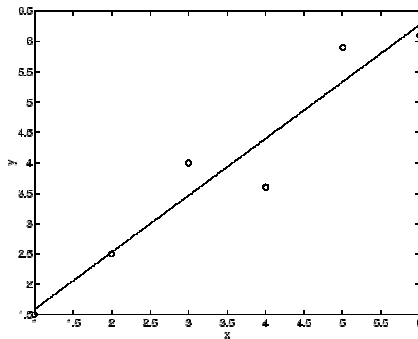
2. Ajuste de líneas: mínimos cuadrados



despejando :

$$a = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$b = \frac{\sum y - a \sum x}{n}$$



prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

30

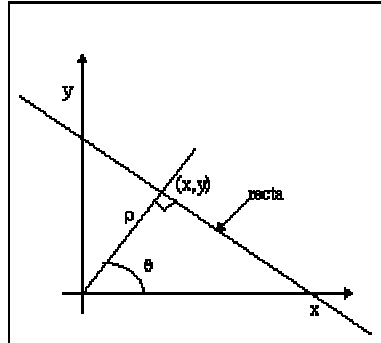
3. Transformada Hough



La transformada Hough se utiliza para el enlace de puntos de borde y la extracción de rectas. Implica la transformación de coordenadas Cartesianas a coordenadas polares de la forma:

$$\rho = x \cos \theta + y \sin \theta$$

Los dos inconvenientes principales de esta transformada son que no es capaz de encontrar los extremos de la recta, y que la transformada ha sido patentada, por lo que su uso en algún proyecto requiere el pago de royalties a la familia Hough.



prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

31

3. Transformada Hough



Desarrollo:

Sea : $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$

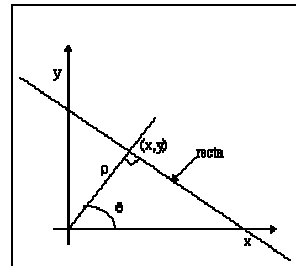
Recta :

$$y = ax + b$$

Donde :

$$a = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}, \quad b = y_1 - \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} x_1$$

Para obtener el punto x_0, y_0 , se puede minimizar la función de distancia desde el origen hasta los puntos de la recta.



prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

32

3. Transformada Hough



Desarrollo:

Distancia al origen :

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

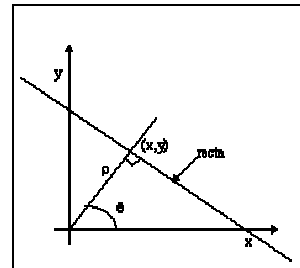
$$d' = x^2 + (ax+b)^2 = x^2 + a^2x^2 + 2abx + b^2$$

Derivando :

$$2x + 2xa^2 + 2ab = 0$$

Entonces :

$$x_0 = \frac{-ab}{1+a^2}, \quad y_0 = b - \frac{a^2b}{1+a^2}$$



prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

33

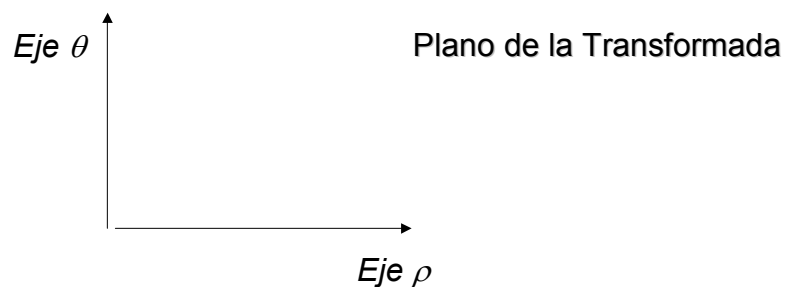
3. Transformada Hough



Desarrollo:

Ecuación polar :

$$\rho = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad \theta = \arctan(y_0 / x_0)$$



prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

34

3. Transformada Hough



La transformada consiste en contabilizar en una matriz o “plano de la transformada” todas las rectas en su representación polar.

Eje θ

Si existen muchos pares de puntos en una “recta”, en el plano de la Transformada se debería detectar un máximo. La discretización de los ejes de la transformada permite ajustar la sensibilidad de la detección.

Eje ρ

prb@2007

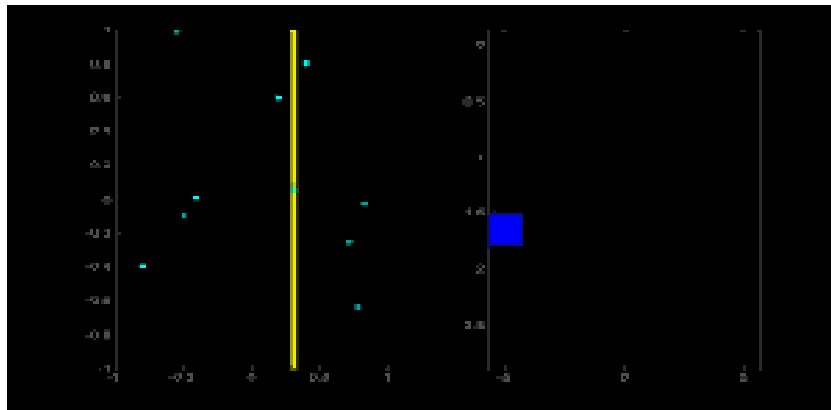
Imágenes: Gonzalez&Wood

35

3. Transformada Hough



Transformada...



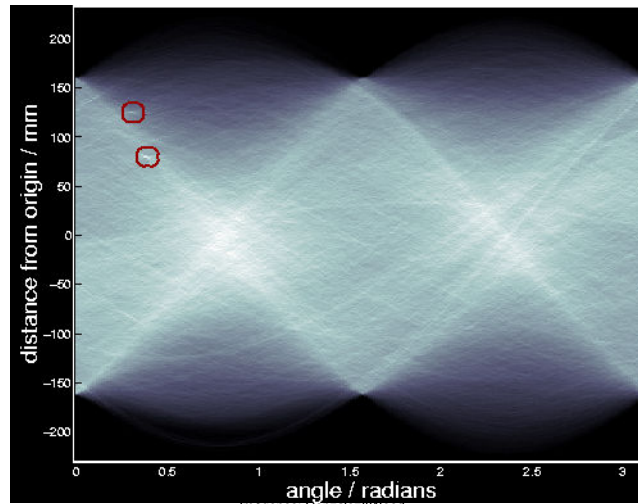
prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

36

3. Transformada Hough

Transformada...

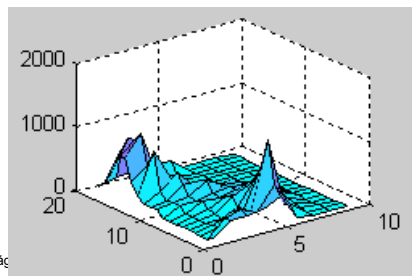
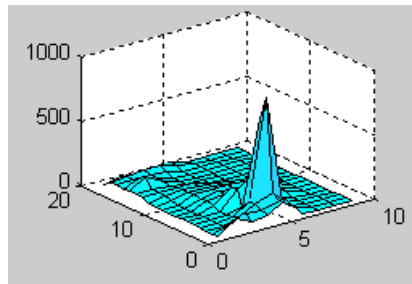


prb@2007

Imágenes: González & Woods

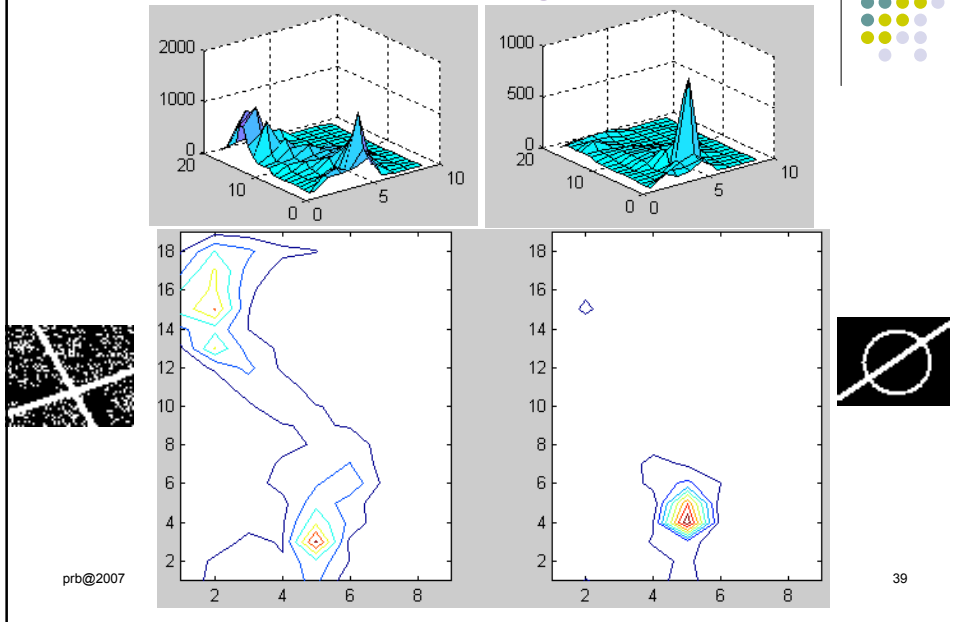
37

3. Transformada Hough (Delta=10)

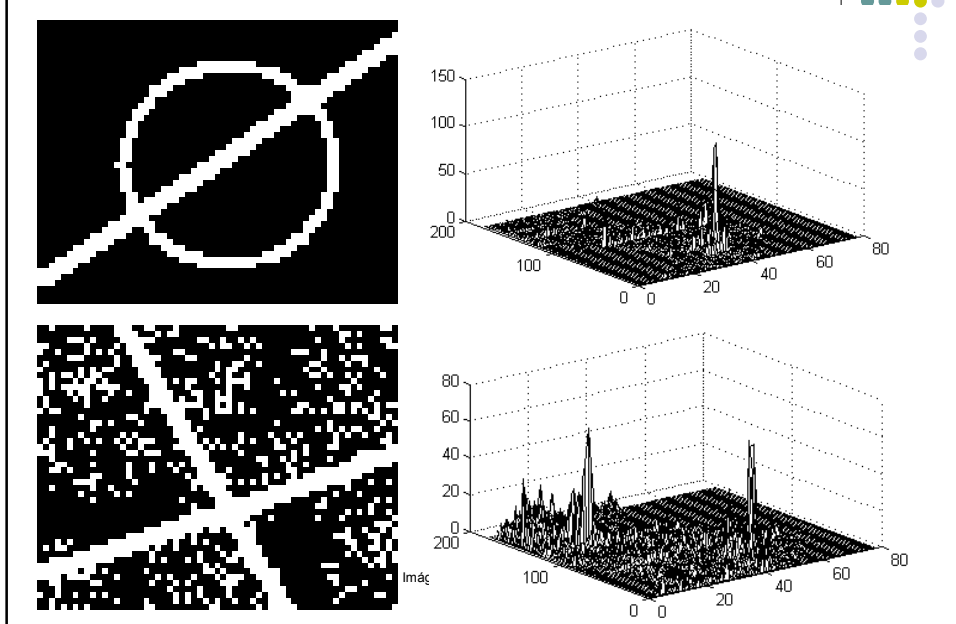


38

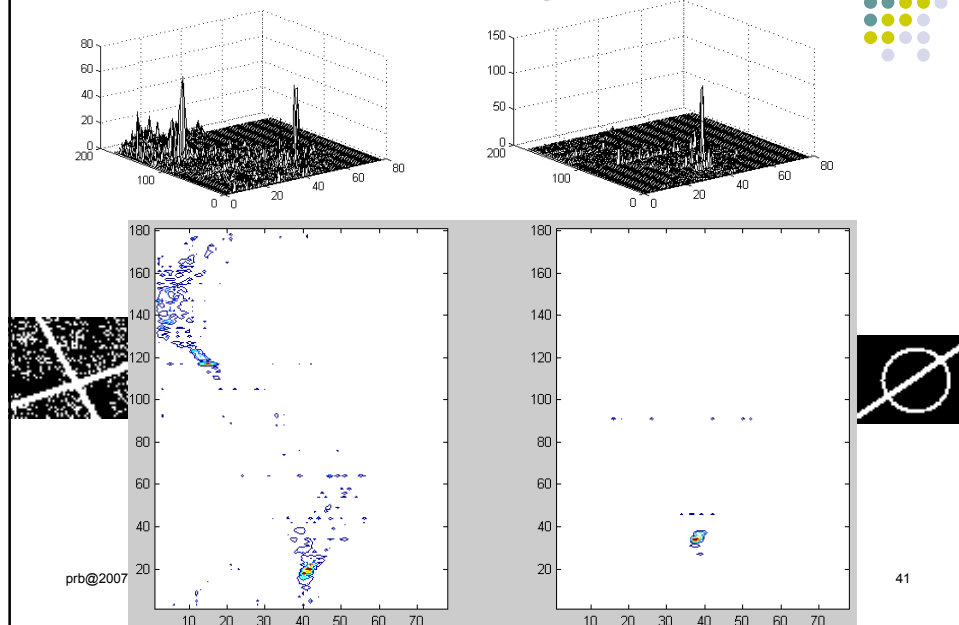
3. Transformada Hough (Delta=10)



3. Transformada Hough (Delta=1)



3. Transformada Hough (Delta=1)



3. Algoritmo

```

for f=1:4:nf
    for c=1:4:nc
        if IM(f,c)==1
            for ff=1:4:nf
                for cc=1:4:nc
                    if ff~=f & cc~=c & IM(ff,cc)==1
                        %ec recta
                        if cc==c, x0=c;y0=0;
                        else
                            a=(ff-f)/(cc-c);
                            b=ff-a*cc;
                            x0=-a*b/(1+a*a);
                            y0=b-a*a*b/(1+a*a);
                        end;
                        r=sqrt(x0^2+y0^2)+1;
                        if x0==0, ang=90;else ang=atan(y0/x0)*180/pi+90;end;
                        ang=round(ang/DELTA)+1;
                        r=round(r/DELTA)+1;
                        H(ang,r)= H(ang,r)+1;
                    end;%if
                end;%for cc
            end;%for ff
        end;%if
    end;%for c
end;%for f

```

3. Transformada Hough modificadas

Esta transformada también se puede modificar para detectar otras “figuras” o funciones.

Por ejemplo, círculos. Para cada par de puntos existe sólo 1 círculo que los contiene en su borde en posiciones diametrales.

El círculo se puede representar por:

- .- RADIO
- .- Angulo desde origen hasta el centro
- .- Distancia desde el origen hasta el centro

El espacio de la transformada tiene 3 dimensiones → se deben detectar “aglomeraciones” de puntos en el espacio.

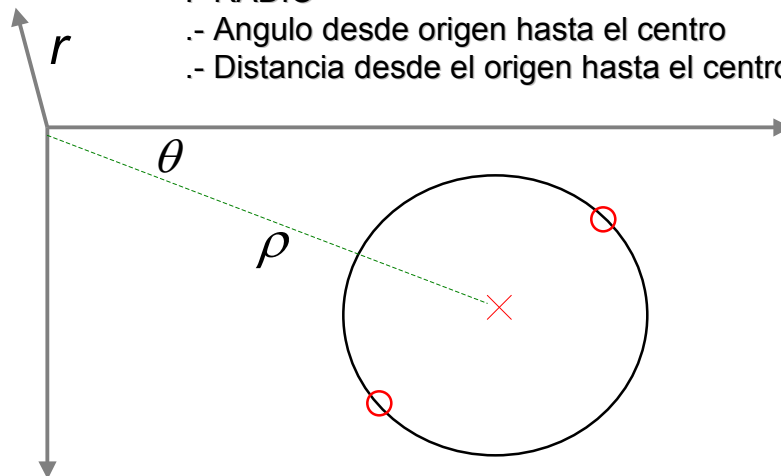


43

3. Transformada Hough modificadas

El círculo se puede representar por:

- .- RADIO
- .- Angulo desde origen hasta el centro
- .- Distancia desde el origen hasta el centro



prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

44



3. Transformada Hough modificadas



Una simplificación consiste en representar los círculos sólo por el:

- .- Angulo desde origen hasta el centro
- .- Distancia desde el origen hasta el centro

Es decir no se considera el radio $\rightarrow$ si existen muchos círculos de diferentes radios, pero con un mismo centro, se detectan como uno solo.

La transformada se puede extender para cualquier función $y=f(x)$.

prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

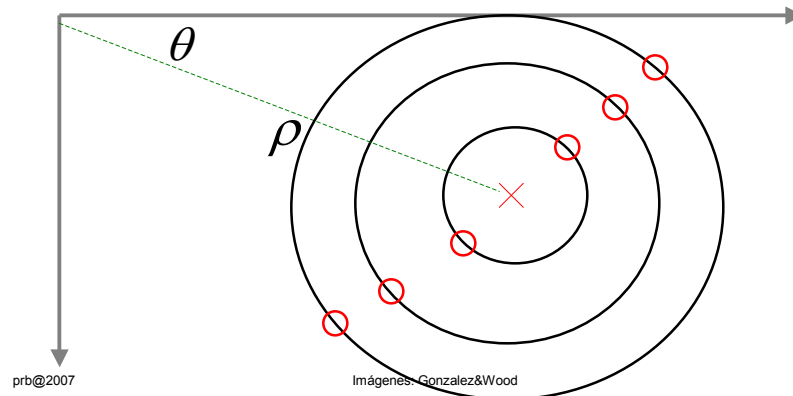
45

3. Transformada Hough modificadas



Si el círculo se representa por:

- .- Angulo desde origen hasta el centro
- .- Distancia desde el origen hasta el centro



prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

46



DESCRIPTORES DE FRONTERAS (BORDES)

prb@2007

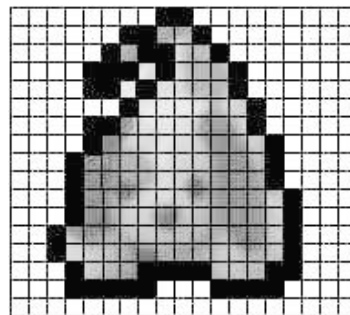
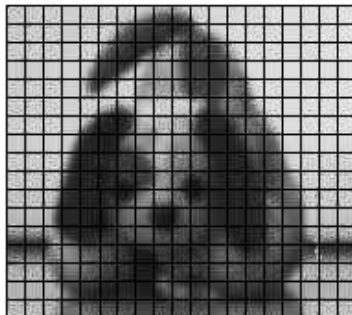
Imágenes: Gonzalez&Wood

47

Descripción de Fronteras...



Generalmente se desea reconocer o describir un cierto objeto delimitado por un borde. Una solución es encontrar el “código de cadena” que representa dicho borde.



prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

48

1. Códigos de Cadena



Se puede utilizar vecindad tipo 4 u 8.

Ej. Aplicando código según vecindad tipo 8:

3	2	1
4	0	
5	6	7

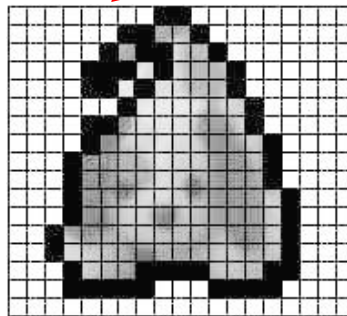
INICIO

0-7-7-7-6-7-6-7-6-6-6-6

1-1-0-1

4-5-5-4-2

2-1-2-0-1-1-1-2



4-6-4-4-4-3-4-4-4-6-4-4-4-2-3

prb@2007

Imágenes: Gonzalez & Wood

49

1. Códigos de Cadena



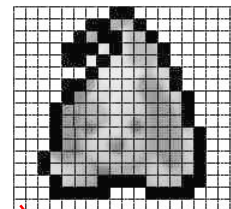
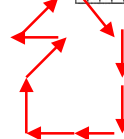
Para comparar diferentes códigos de cadena se debe normalizar a un tamaño fijo. Para ello se puede considerar la “moda” en segmentos.

3	2	1
4	0	
5	6	7

Ej. Aplicando segmentos de 5:

0-7-7-7-6-7-6-7-6-6-6-6-4-6-4-4-4-3-4-4-4-6-4-4-4-2-3- 2-1-2-0-1-1-1-2-4-5-5-4-2-1-1-0-1

7-6-6-4-4-2-1-4-1



prb@2007

Imágenes: Gonzalez & Wood

50

1. Códigos de Cadena

Para comparar dos códigos de cadena normalizados, se puede determinar la correlación cruzada.

3	2	1
4	0	
5	6	7

135	90	45
180		0
225	270	315

Sea :

$$C_{ab} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Donde :

$$a_i b_i = \cos(\angle a_i - \angle b_i)$$

Si las cadenas son similares el coeficiente C tiende a 1.

prb@2007

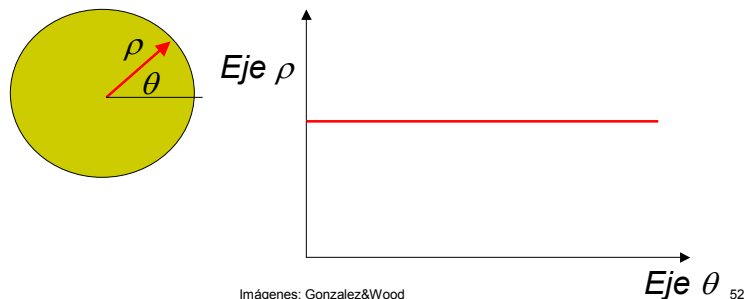
Imágenes: Gonzalez&Wood

51

2. Signaturas

Otro método consiste en determinar la función o curva de signatura de un objeto.

Una de las funciones de signatura más comunes es la distancia de los puntos del borde al centro del objeto



prb@2007

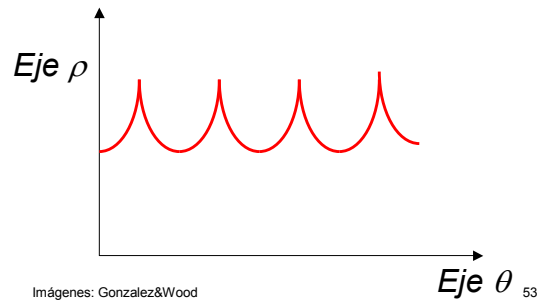
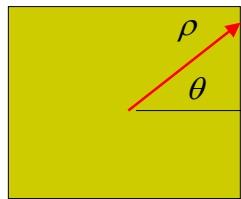
Imágenes: Gonzalez&Wood

Eje θ 52

2. Signaturas



Las signaturas (firmas) de los objetos se deben normalizar en el eje y , para comparar objetos de igual forma pero distinto tamaño.



prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

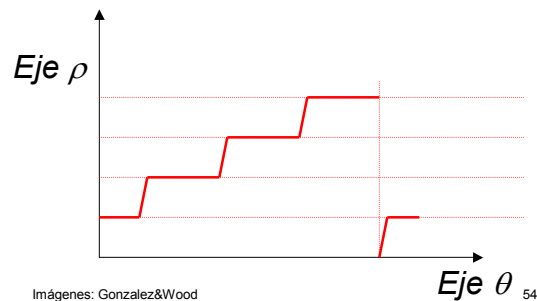
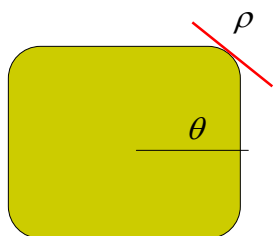
53

2. Signaturas



Existen otras funciones de signatura:

- .- Desplazar una recta tangente en el borde
- .- Histograma de los valores del ángulo tangente



prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

54

3. Descriptores de Fourier



Los Descriptores de Fourier representan la forma del objeto.

Los primeros descriptores indican la forma general del objeto y los últimos descriptores los más pequeños detalles

Para una clasificación un pequeño conjunto de descriptores puede ser suficiente.

prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

55

3. Descriptores de Fourier



La TF Unidimensional se aplica sobre una función continua que describe el contorno de una imagen.

Cada punto del borde x,y se considera un punto complejo $p=x+jy$.

De esta manera se aplica la transformada en una dimensión.

prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

56

3. Descriptores de Fourier

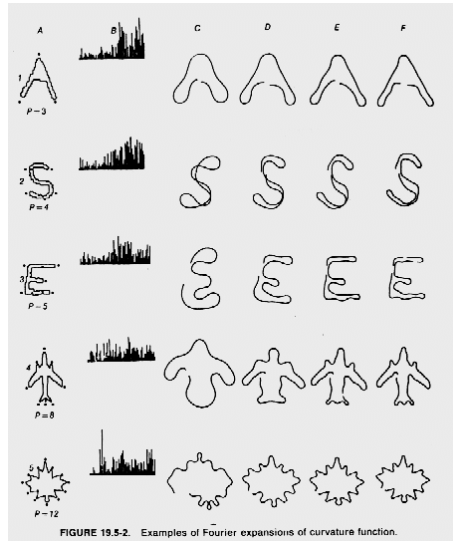


FIGURE 19.5-2. Examples of Fourier expansions of curvature function.

prb@2007

Imágenes: Gonzalez&Wood

57

Con mas descriptores,
mas aproximada será la
imagen a a la original.

La compresión busca el
máximo número de
descriptores que se
puedan eliminar de forma
que se recupere la imagen
original sin problemas.

Permite dar mayor
estabilidad a la
comparación de códigos
de cadena.