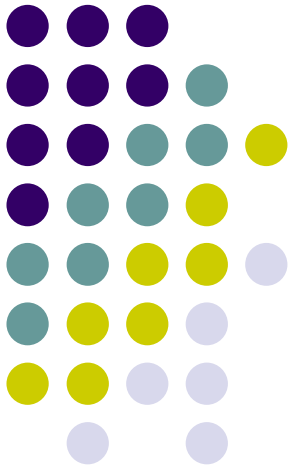
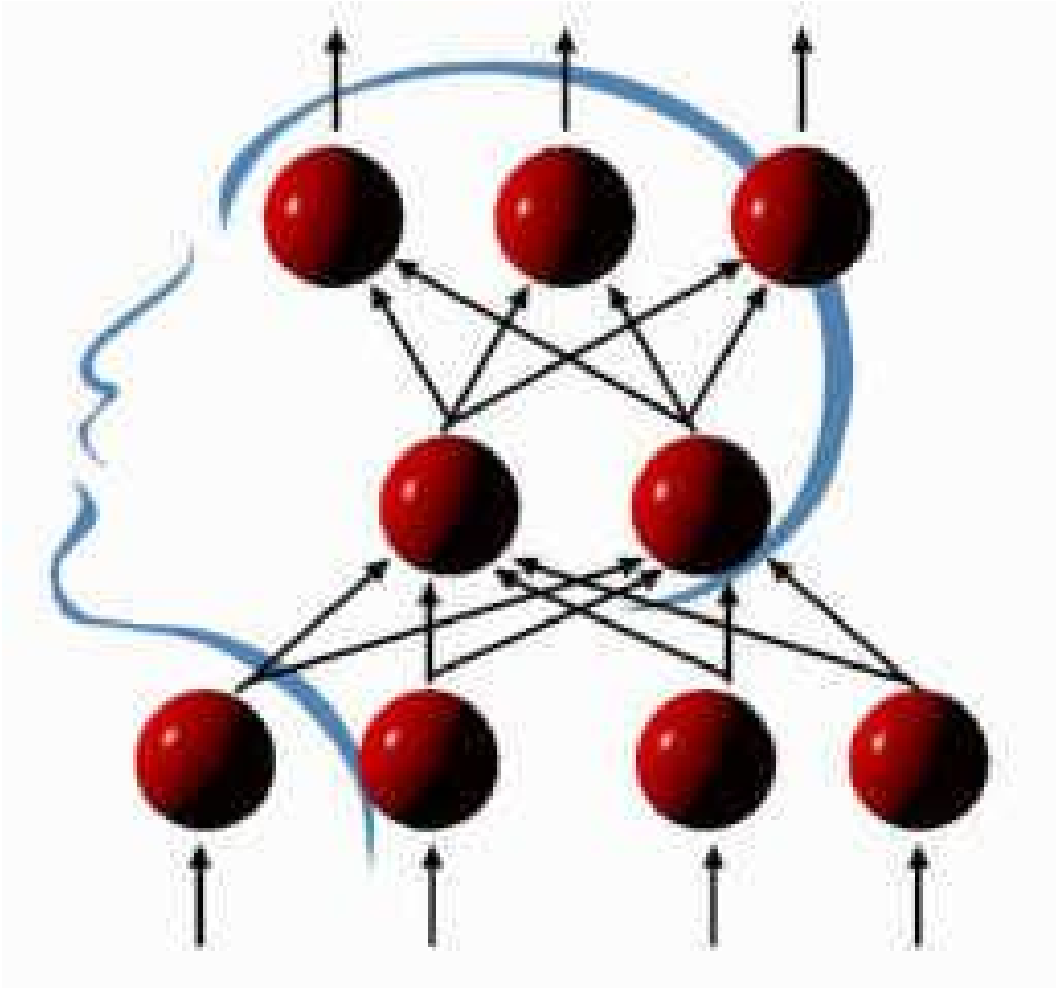
Procesamiento Digital de Imágenes

Pablo Roncagliolo B.

Nº 21

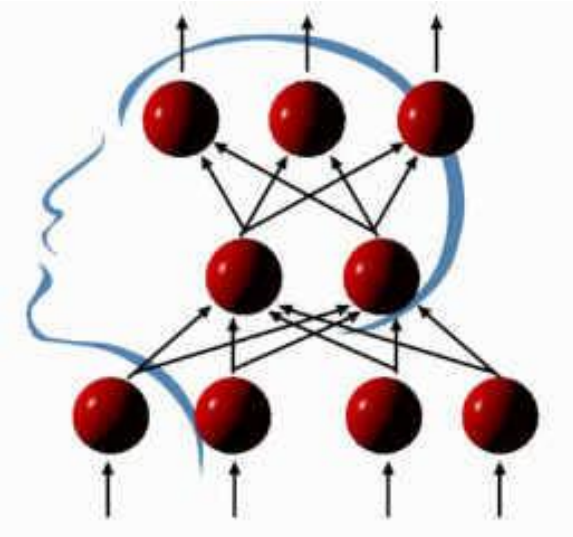


Redes Neuronales



Redes Neuronales Básicas

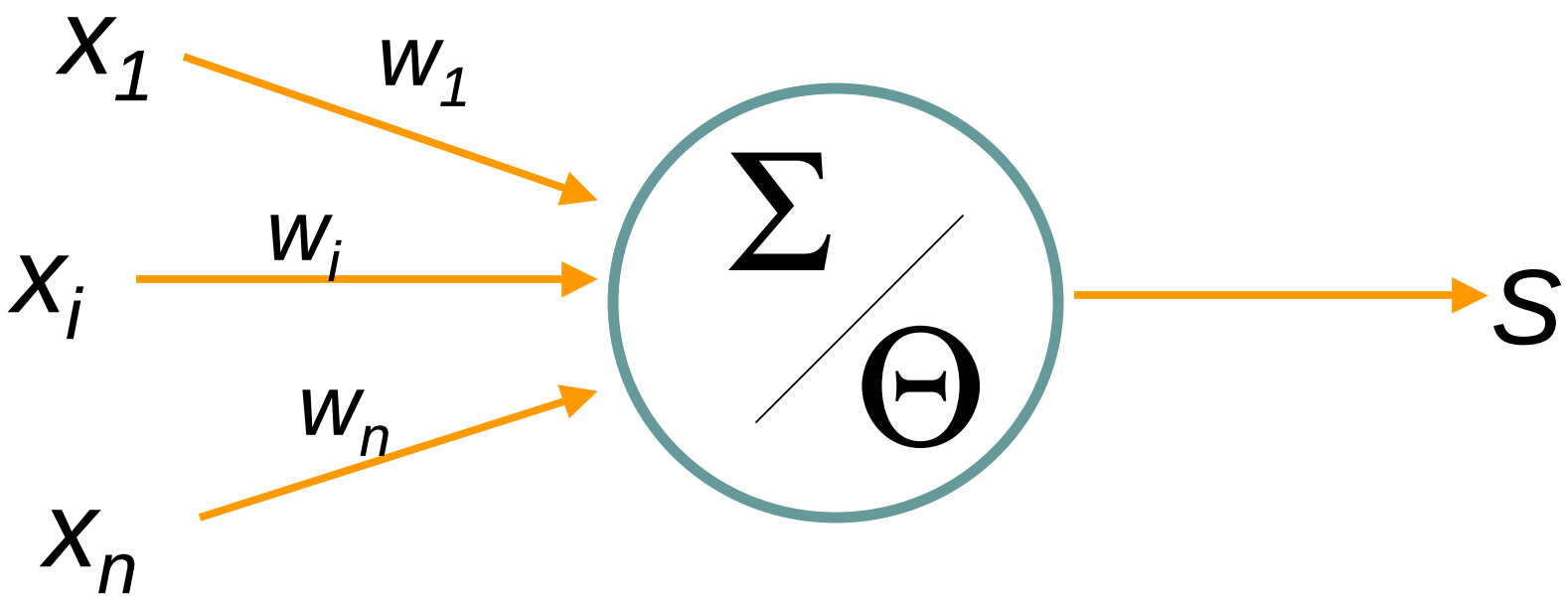
- Células de McCulloch&Pitts
- El Perceptrón
- ADALINE
- El Perceptrón Multicapa



Celulas de McCulloch-Pitts

Ø1943. Fueron un modelo simplificado del funcionamiento de las neuronas del cerebro.

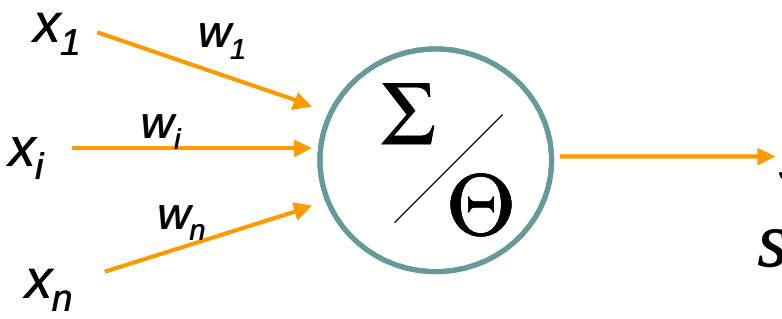
Ø Cada célula puede tener dos estados de salida, 0 ó 1.



Celulas de McCulloch-Pitts

Ø Las células operan en lapsos discretos.

Ø Una red neuronal de células de McCulloch-Pitts tiene la capacidad de computo universal. Es decir, cualquier estructura que pueda ser programada en un computador, puede ser modelada con este tipo de redes.

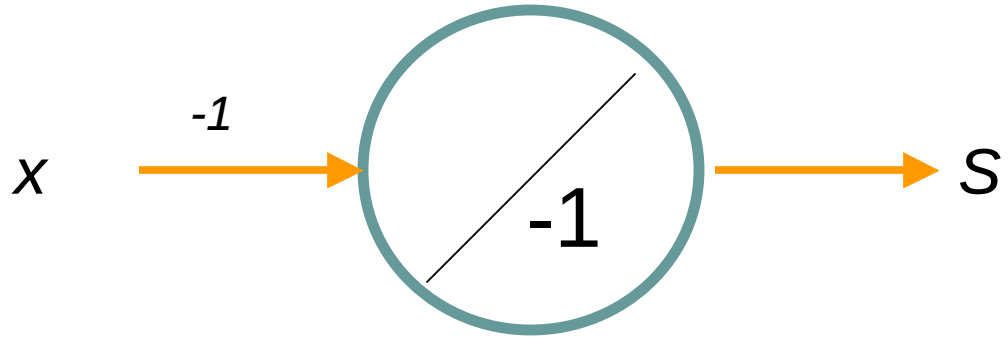


$$s(t+1) = \begin{cases} 1 & \sum_i w_i x_i(t) > q \\ 0 & \ldots en\ caso\ contrario \end{cases}$$

Ø Sin embargo, el tamaño de estas redes para problemas complejos es muy elevado. Además el método de aprendizaje para redes muy grandes no es apropiado.

Celulas de McCulloch-Pitts

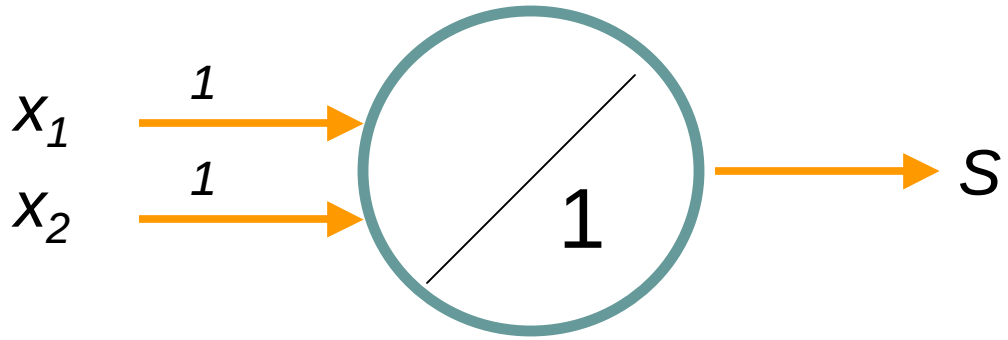
- Ejemplo: NOT



x_1	$\sum x_i w_i$	S
0	0	1
1	-1	0

Celulas de McCulloch-Pitts

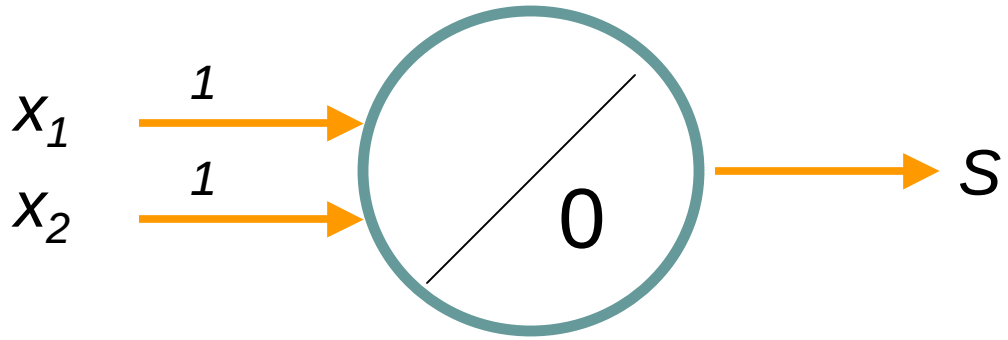
- Ejemplo: AND



x_1	x_2	$\sum x_i w_i$	S
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	2	1

Celulas de McCulloch-Pitts

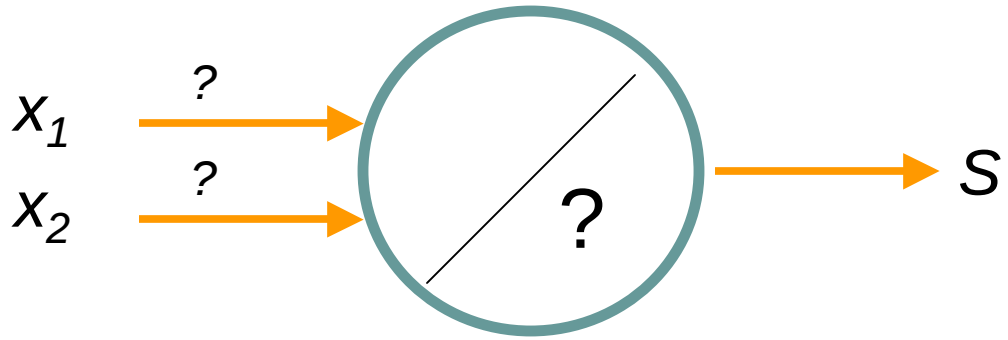
- Ejemplo: OR



x_1	x_2	$\sum x_i w_i$	S
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	2	1

Celulas de McCulloch-Pitts

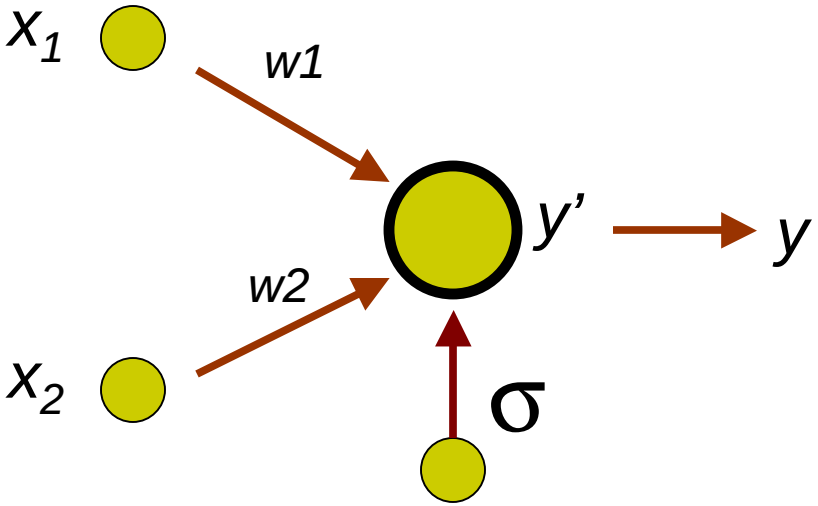
Ø XOR ??? Con una celula no es posible.



x_1	x_2	$\sum x_i w_i$	S
0	0		0
0	1		1
1	0		1
1	1		0

El Perceptrón

- Rosenblat generalizó las células de McCulloch-Pitts
- Se concibió como un sistema capaz de realizar tareas de clasificación de forma automática.
- La idea era disponer de un sistema que a partir de un conjunto de ejemplos (patrones) de clases diferentes, fuera capaz de determinar las ecuaciones de las superficies que hacían de frontera de dichas clases.



$$y' = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$$

$$y = F(y', s)$$

$$F(s, s) = \begin{cases} 1 & si\ s > s \\ -1 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

El Perceptrón

Ø Se puede expresar la misma ecuación considerando SIGMA como parte de la sumatoria de entrada a la función:

$$y = F\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i + s \right)$$

$$F(s, s) = \begin{cases} 1 & si\ s > 0 \\ -1 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

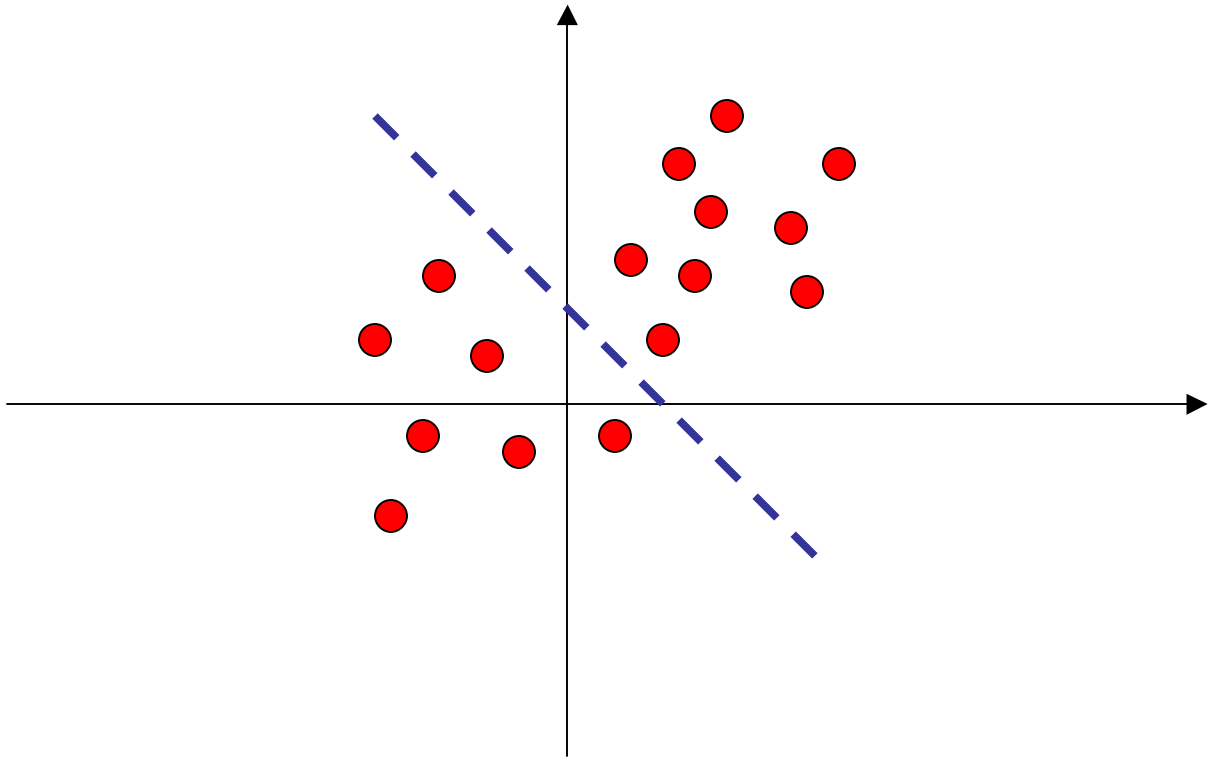
Ø Ej. Para dos entradas:

$$y = F\left(w_1 x_1 + w_2 x_2 + s \right)$$

Ø Se observa que el umbral que separa las dos respuestas de la red 1 y –1, corresponde a una recta con pendiente –w1/w2 e intercepto -s/w2

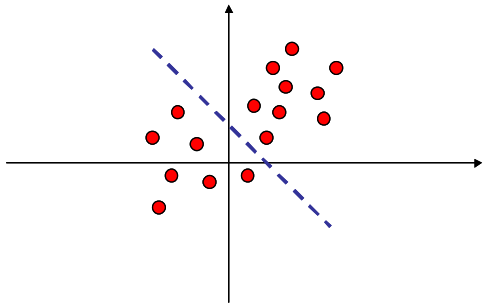
El Perceptrón

- Graficamente, la separación de las dos clases:



El Perceptrón

Ø En el caso general sería:



Ø Dado el conjunto de puntos A=(a1,a2....an) y B=(b1,b2....bn). Obtener el conjunto W=(w1,w2....wn) tal que:

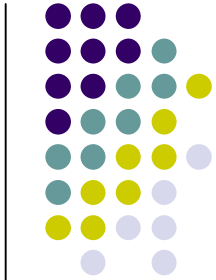
$$\forall \vec{a} \in A : w_1 a_1 + ... + w_n a_n + s > 0$$

$$y$$

$$\forall \vec{b} \in B : w_1 b_1 + ... + w_n b_n + s > 0$$

Ø Esta es la base del aprendizaje del PERCEPTRON.

El Perceptrón



ØEl proceso de aprendizaje:

$$Sea:$$

$$d(x) = clase\ del\ vector\ x = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

ØPASO 0: Comenzar con valores aleatorios para pesos y umbral.

ØPASO 1: Seleccionar un ejemplo X del conjunto de entrenamiento.

ØPASO 2: Si y<>d(x), modificar w_i de acuerdo con:

$$\Delta w_i = d(x) x_i$$

ØPASO 3: Si no se ha cumplido el criterio de finalización, volver a **1**

El Perceptrón

- El proceso de aprendizaje:

$$\Delta w_i = d(x) x_i$$

- Se observa que si la salida y=d(x)=1 para un vector x de clase –1, entonces

$$\Delta w_i = -x_i$$

- El delta W es proporcional al nodo de entrada y en la dirección de clasificación del vector x.

El Perceptrón

$$y = F(w_1 x_1 + w_2 x_2 + s)$$

$$F(s,s) = \begin{cases} 1 & si\ s > 0 \\ -1 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

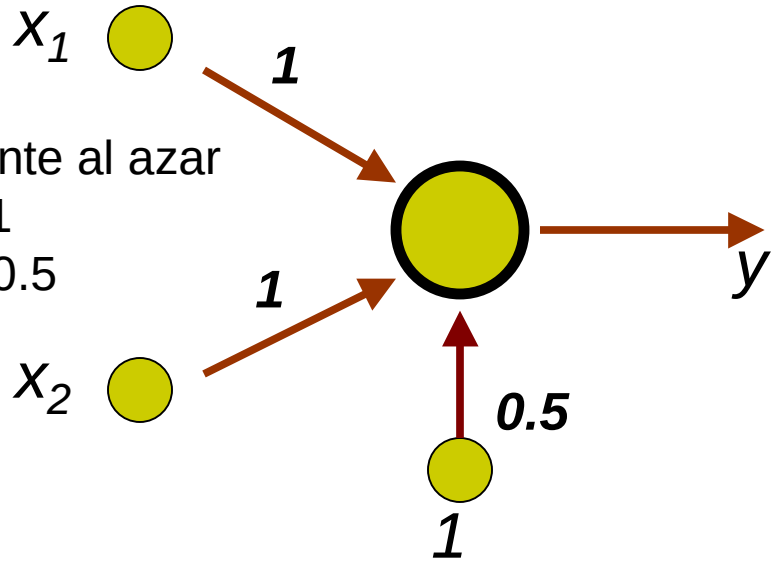
1

Ø Ejemplo: AND

x_1	x_2	AND
0	0	$0(A)$
1	0	$0(A)$
0	1	$0(A)$
1	1	$1(B)$

Patron	*Salida*	*Clasifica*
$(0,0 \mid 0)$	$+1$	*Mal*

Actualizo pesos



Inicialmente al azar
w1=w2=1
Umbral=0.5

$\Delta w_i = d(x) x_i$

$w_1 = w_1 + \Delta w_1 = 1 + (-1)*0 =$ **1**

$w_2 = w_2 + \Delta w_2 = 1 + (-1)*0 =$ **1**

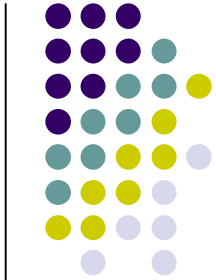
$w_0 = w_0 + \Delta w_0 = 0.5 + (-1)*1 =$ **-0.5**

El Perceptrón

$$y = F(w_1 x_1 + w_2 x_2 + s)$$

$$F(s,s) = \begin{cases} 1 & si\ s > 0 \\ -1 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

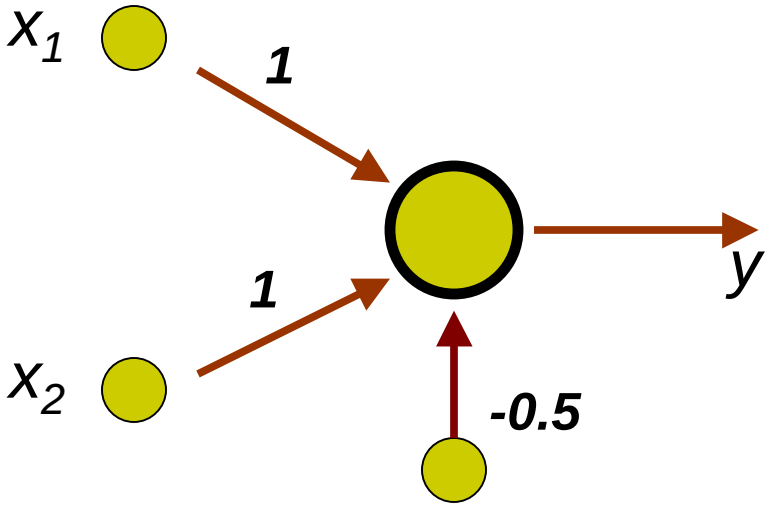
2



Ø Ejemplo: AND

x_1	x_2	AND
0	0	$0(A)$
1	0	$0(A)$
0	1	$0(A)$
1	1	$1(B)$

Patron	*Salida*	*Clasifica*
$(0,1 \mid 0)$	$+1$	*Mal*



$\Delta w_i = d(x) x_i$

$w_1 = w_1 + \Delta w_1 = 1 + (-1)*0 = 1$

$w_2 = w_2 + \Delta w_2 = 1 + (-1)*1 = 0$

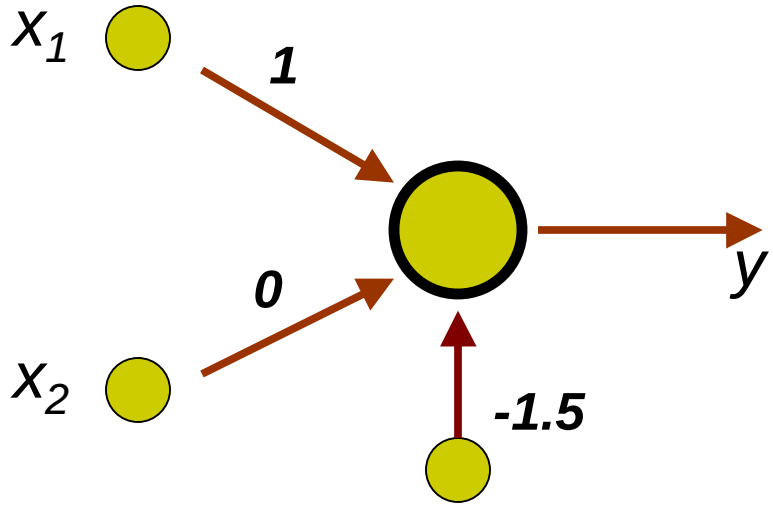
$w_0 = w_0 + \Delta w_0 = -0.5 + (-1)*1 = -1.5$

El Perceptrón

Ø Ejemplo: AND

x_1	x_2	AND
0	0	$0(A)$
1	0	$0(A)$
0	1	$0(A)$
1	1	$1(B)$

Patron	*Salida*	*Clasifica*
$(1,0 \mid 0)$	-1	*Bien*
$(1,1 \mid 1)$	-1	*Mal*



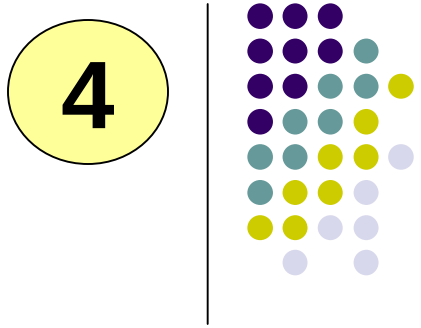
$\Delta w_i = d(x)x_i$

$w_1 = w_1 + \Delta w_1 = 1 + (+1)*1 = 2$

$w_2 = w_2 + \Delta w_2 = 0 + (+1)*1 = 1$

$w_0 = w_0 + \Delta w_0 = -1.5 + (+1)*1 = -0.5$

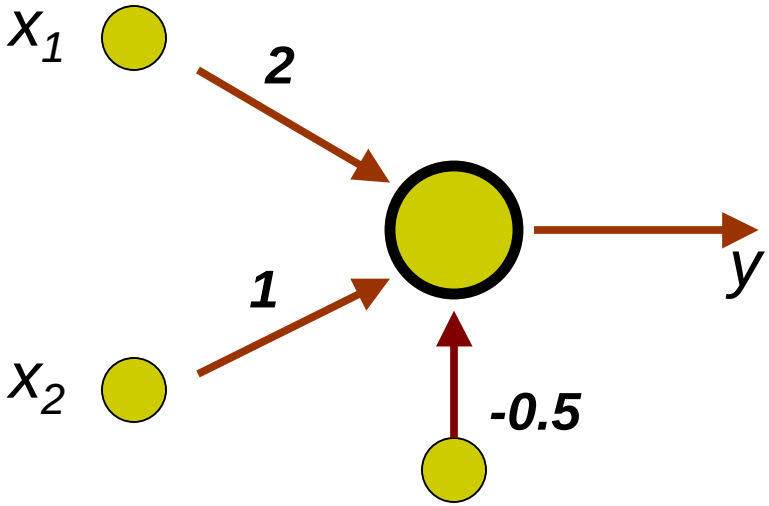
El Perceptrón



ØEjemplo: AND

x_1	x_2	AND
0	0	$0(A)$
1	0	$0(A)$
0	1	$0(A)$
1	1	$1(B)$

Patron	*Salida*	*Clasifica*
$(1,1\|1)$	$+1$	*Bien*
$(0,0\|0)$	-1	*Bien*
$(0,1\|0)$	$+1$	*Mal*



$\Delta w_i = d(x)x_i$

$w_1 = w_1 + \Delta w_1 = 2 + (-1)*0 = 1$

$w_2 = w_2 + \Delta w_2 = 1 + (-1)*1 = 0$

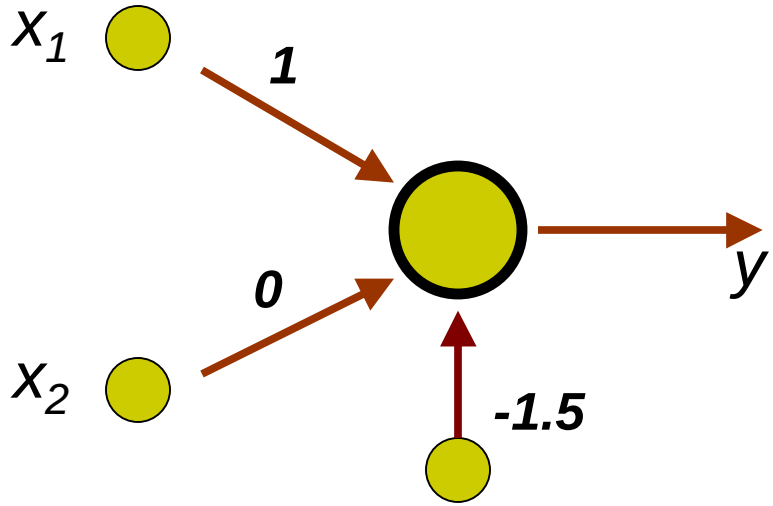
$w_0 = w_0 + \Delta w_0 = -0.5 + (-1)*1 = -1.5$

El Perceptrón

Ø Ejemplo: AND

x_1	x_2	AND
0	0	$0(A)$
1	0	$0(A)$
0	1	$0(A)$
1	1	$1(B)$

Patron	*Salida*	*Clasifica*
$(1,0 \mid 0)$	$+1$	*Mal*



$\Delta w_i = d(x)x_i$

$w_1 = w_1 + \Delta w_1 = 1 + (-1)*1 = 0$

$w_2 = w_2 + \Delta w_2 = 0 + (-1)*0 = 0$

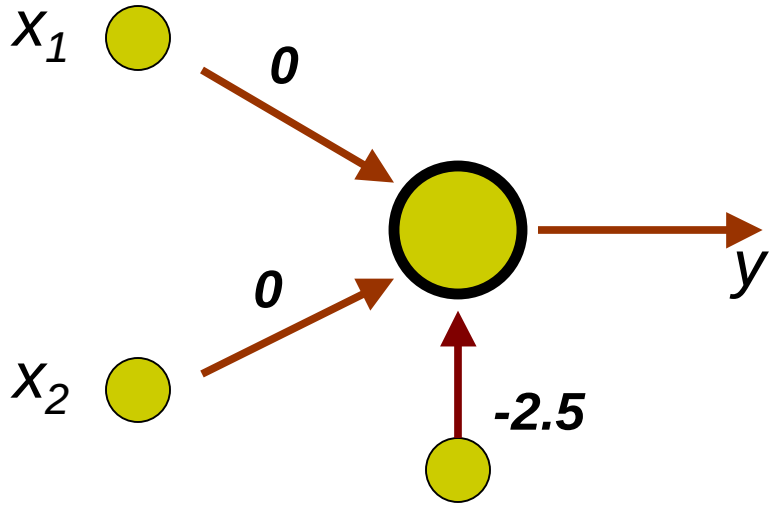
$w_0 = w_0 + \Delta w_0 = -1.5 + (-1)*1 = -2.5$

El Perceptrón

Ø Ejemplo: AND

x_1	x_2	AND
0	0	$0(A)$
1	0	$0(A)$
0	1	$0(A)$
1	1	$1(B)$

Patron	*Salida*	*Clasifica*
$(1,1\,\vert\,1)$	-1	*Mal*



$\Delta w_i = d(x)x_i$

$w_1 = w_1 + \Delta w_1 = 0 + (+1)*1 = 1$

$w_2 = w_2 + \Delta w_2 = 0 + (+1)*1 = 1$

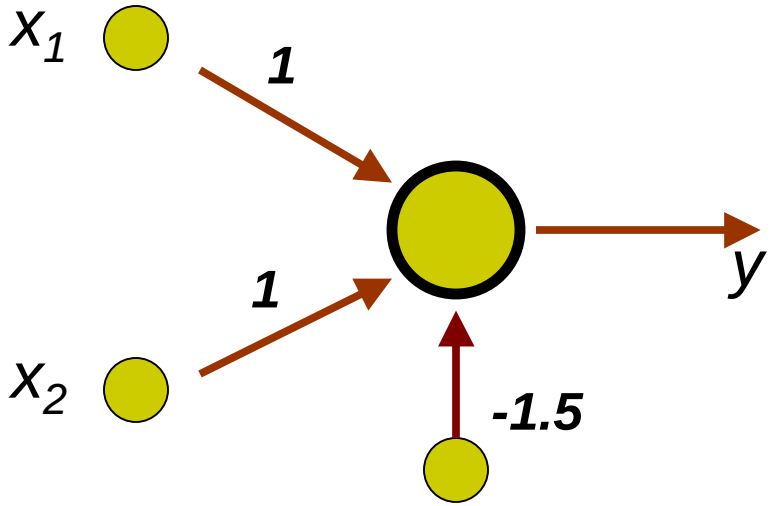
$w_0 = w_0 + \Delta w_0 = -2.5 + (+1)*1 = -1.5$

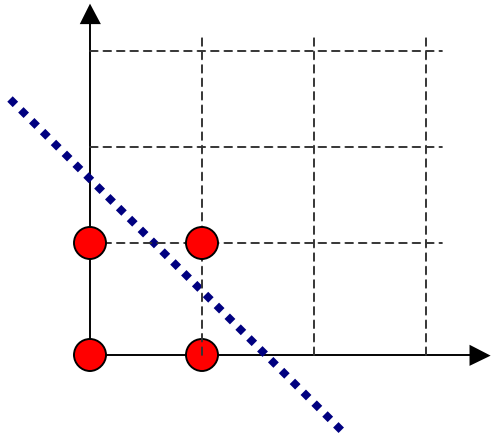
El Perceptrón

- Ejemplo: AND

x_1	x_2	AND
0	0	$0(A)$
1	0	$0(A)$
0	1	$0(A)$
1	1	$1(B)$

Patron	*Salida*	*Clasifica*
$(0,0 \mid 0)$	-1	*Bien*
$(0,1 \mid 0)$	-1	*Bien*
$(1,0 \mid 0)$	-1	*Bien*
$(1,1 \mid 1)$	$+1$	*Bien*

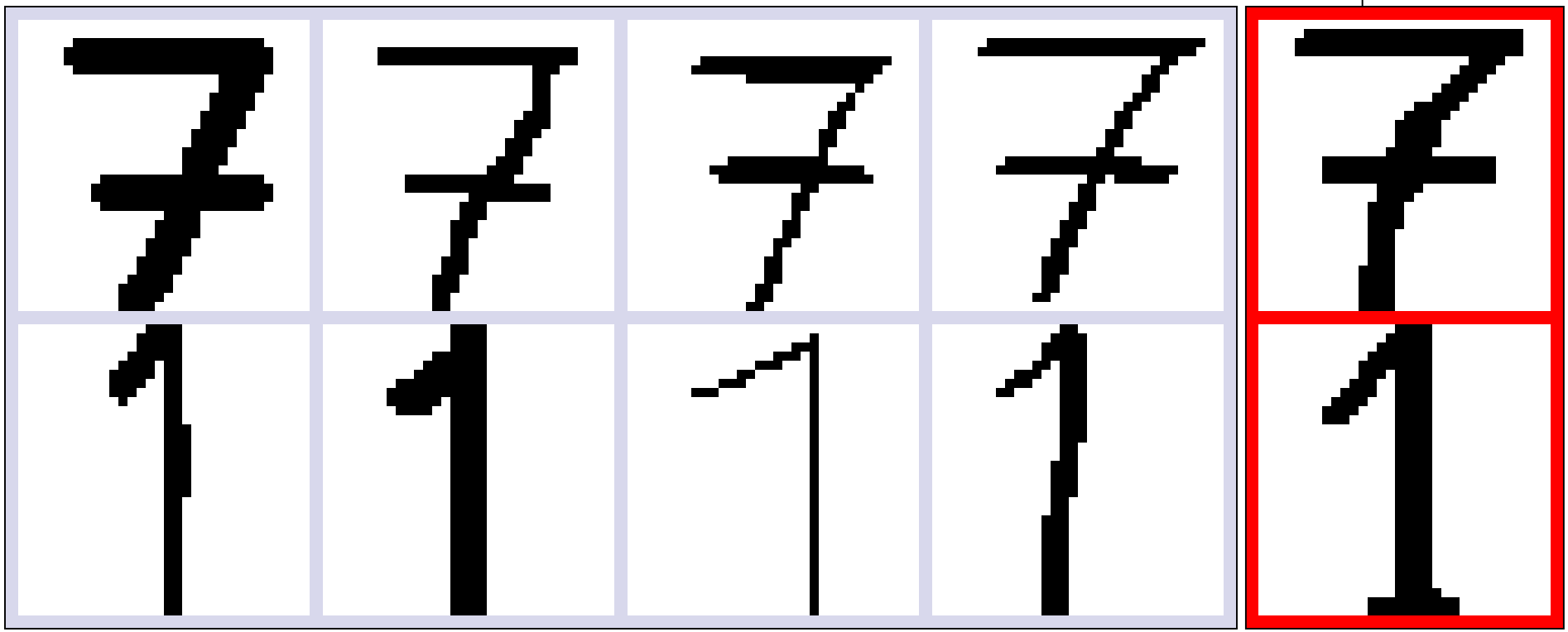




$$x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1 - 1.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -x_1 - 1.5$$

El Perceptrón

- Ejemplo práctico...



Set de ejemplos durante el entranamiento

Ejemplos fuera del entrenamiento para verificar capacidad de generalización

El Perceptrón

ØPaso 1

Respuestas correctas para los 8 ejemplos de entrenamiento

```
clear;

map1=(0:255)/255;
map=[map1' map1' map1'];
figure(1);
COLORMAP(map);

CLASE=[1 1 1 1 -1 -1 -1 -1];

PESOS=rand(1,1024);
UMB=rand(1,1);
```

$$y = F\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i + s \right)$$

El Perceptrón

El ciclo while se debería realizar hasta que todos los ejemplos sean clasificados correctamente de manera consecutiva.

ØPaso 1

Lee imagen 32x32

Transforma en vector de 1024

```
index=1;
i=0;
while i<200
  A=double(imread(['f' num2str(index) '.bmp']));
  subplot(2,1,1); image(A);

  CAPA_ENTRADA=[];
  for f=1:32, CAPA_ENTRADA=[CAPA_ENTRADA A(f,:)];end;

  Y=sum(CAPA_ENTRADA.*PESOS+UMB);
  if (Y>0 & CLASE(index)<0) | (Y<0 & CLASE(index)>0)
      disp('ERROR')
      PESOS=PESOS+CLASE(index)*CAPA_ENTRADA;
      UMB=UMB+CLASE(index);
  end;

  index=index+1;
  if index>8, index=1; end;
  i=i+1;
end;
```

$$y = F\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i + s\right)$$

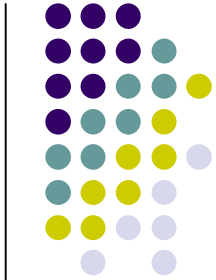
$$w_i = w_i + \Delta w_i = w_i + d(x)x_i$$

El Perceptrón è ADALINE

- ADALINE (ADAptive LInear NEuron): Neuron Lineal Adaptativa
  - La salida del perceptrón **es binaria**.
  - La regla de aprendizaje del perceptrón **no mide el grado de "error".**
  - Widrow & Hoff, 1960 proponen ADALINE.
    - Consiste simplemente en una transformación que permite adaptar una entrada X a una salida Y.

$$\mathbf{r}\ y = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + s$$

ADALINE



Ø La regla de aprendizaje de ADALINE considera el error entre la salida lograda **y** versus la salida deseada **d**

$$\left| \mathbf{r}_{d} - \mathbf{r}_{y} \right|$$

Ø Esta regla se conoce como REGLA DELTA

$$\Delta w_i = a \sum_{\forall p} (d_p - y_p) x_i$$

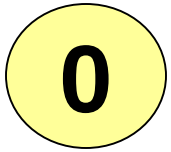
Ø La constante a se denomina TASA DE APRENDIZAJE

ADALINE

Ø Al igual que en el perceptrón los pasos son:

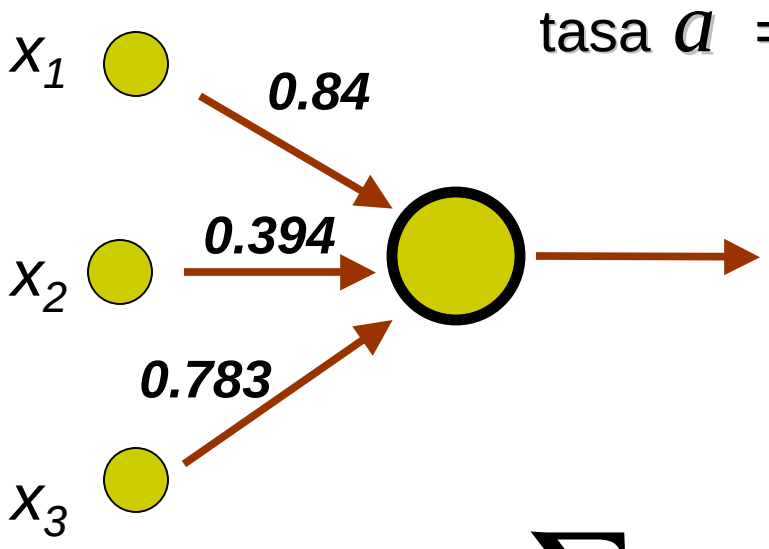
1. Inicializar los pesos en forma aleatoria
2. Introducir PATRON de entrada
3. Calcular salida Y, y obtener diferencia $\sum_{\forall p}(d_p - y_p)$
4. Para todos los pesos, multiplizar dicha diferencia por la entrada correspondiente y ponderarla por la tasa a
5. Actualizar todos los pesos $w_i = w_i + \Delta w_i$
6. Si no se ha cumplido el criterio de convergencia, regresar a **2**. Si se han acabado todos los patrones, empezar de nuevo a introducir patrones.

ADALINE



- Ejemplo: Decodificador Binario a Decimal

0	0	1	[1]
0	1	0	[2]
0	1	1	[3]
1	0	0	[4]
1	0	1	[5]
1	1	0	[6]
1	1	1	[7]



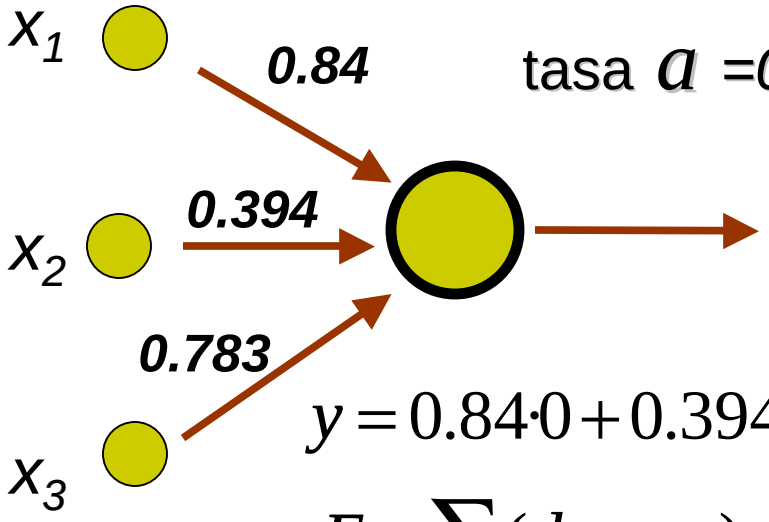
$$y = \sum_{\forall i} w_i x_i$$

ADALINE

1

Ø Ejemplo: Decodificador Binario a Decimal

0	0	1	[1]
0	1	0	[2]
0	1	1	[3]
1	0	0	[4]
1	0	1	[5]
1	1	0	[6]
1	1	1	[7]



$$y = 0.84 \cdot 0 + 0.394 \cdot 0 + 0.783 \cdot 1 = 0.783$$

$$E = \sum_{\forall p} (d_p - y_p) = 1 - 0.783 = 0.217$$

$$w_1 = w_1 + aE \cdot x_1 = 0.84$$

$$w_2 = w_2 + aE \cdot x_2 = 0.394$$

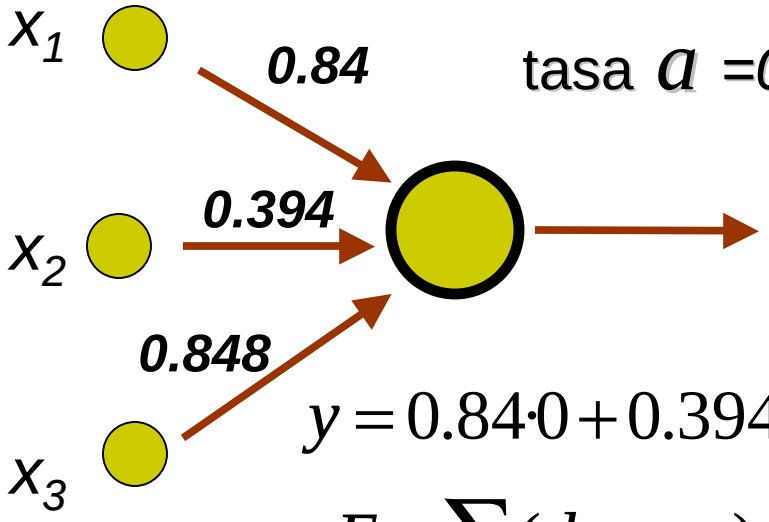
$$w_3 = w_3 + aE \cdot x_3 = 0.783 + 0.3 \cdot 0.217 \cdot 1 = 0.848$$

ADALINE

2

Ø Ejemplo: Decodificador Binario a Decimal

0	0	1	[1]
0	1	0	[2]
0	1	1	[3]
1	0	0	[4]
1	0	1	[5]
1	1	0	[6]
1	1	1	[7]



tasa a =0.3

$$y = 0.84 \cdot 0 + 0.394 \cdot 1 + 0.848 \cdot 0 = 0.394$$

$$E = \sum_{\forall p} (d_p - y_p) = 2 - 0.394 = 1.61$$

$$w_1 = w_1 + a \cdot Ex_1 = 0.84$$

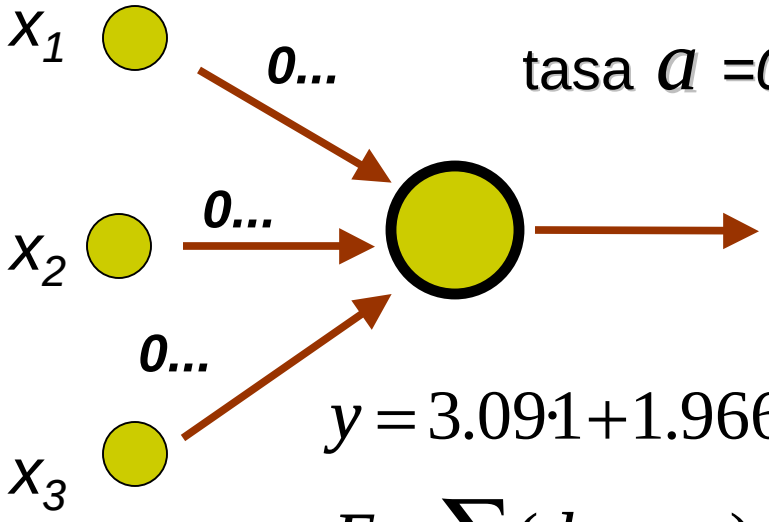
$$w_2 = w_2 + a \cdot Ex_2 = 0.394 + 0.3 \cdot 1.61 \cdot 1 = 0.876$$

$$w_3 = w_3 + a \cdot Ex_3 = 0.848$$

ADALINE

Ø Ejemplo: Decodificador Binario a Decimal

0	0	1	[1]
0	1	0	[2]
0	1	1	[3]
1	0	0	[4]
1	0	1	[5]
1	1	0	[6]
→ 1	1	1	[7]



tasa a =0.3

$$y = 3.09 \cdot 1 + 1.966 \cdot 1 + 1.825 \cdot 1 = 6.881$$

$$E = \sum_{\forall p} (d_p - y_p) = 7 - 6.881 = 0.12$$

Resultado despues de la primera iteración del entrenamiento

$$w_1 = w_1 + aE \cdot x_1 = 3.09 + 0.3 \cdot 0.12 = 3.126$$

$$w_2 = w_2 + aE \cdot x_2 = 1.966 + 0.3 \cdot 0.12 = 2.002$$

$$w_3 = w_3 + aE \cdot x_3 = 1.825 + 0.3 \cdot 0.12 = 1.861$$

ADALINE

Ø Ejemplo: visualización de los pesos según iteraciones..

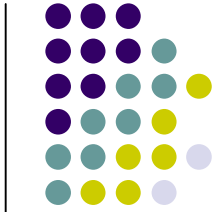
Iteración		*Pesos*	
1	3.12	2.00	1.86
2	3.61	1.98	1.42
3	3.82	1.98	1.2
4	3.92	1.98	1.1
5	3.96	1.99	1.02
6	3.99	2.00	1.01
7	4.00	2.00	1.00
8	4.00	2.00	1.00
9	4.00	2.00	1.00
10	4.00	2.00	1.00

> La tasa de aprendizaje a también puede ser adaptativa.

> Por ejemplo al inicio el valor puede ser alto, para dar "grandes pasos" de corrección del error y para salir de mínimos locales.

> Sin embargo al final del entrenamiento debe disminuir para hacer correcciones finas.

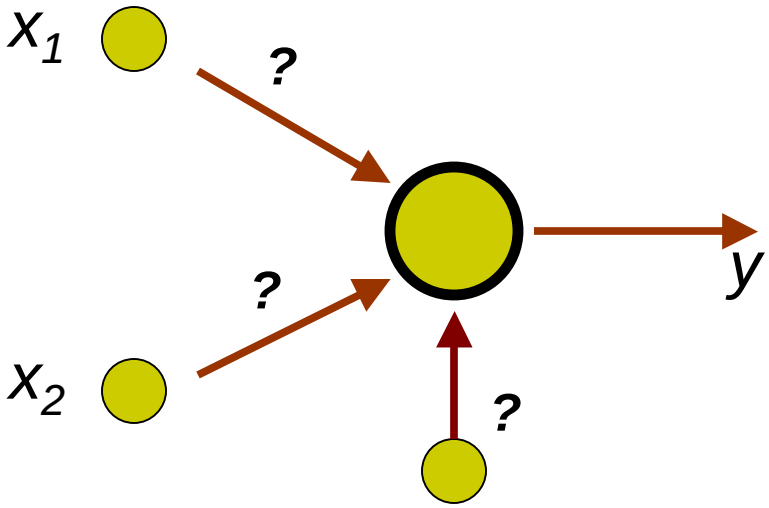
Sin embargo...

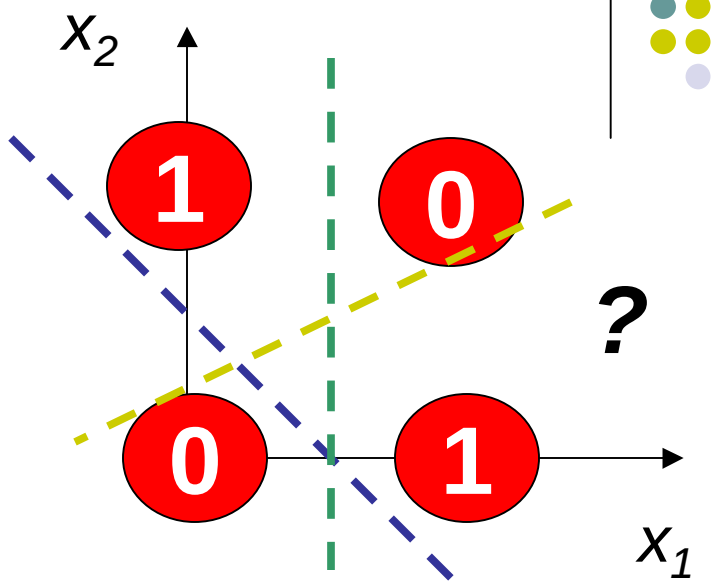


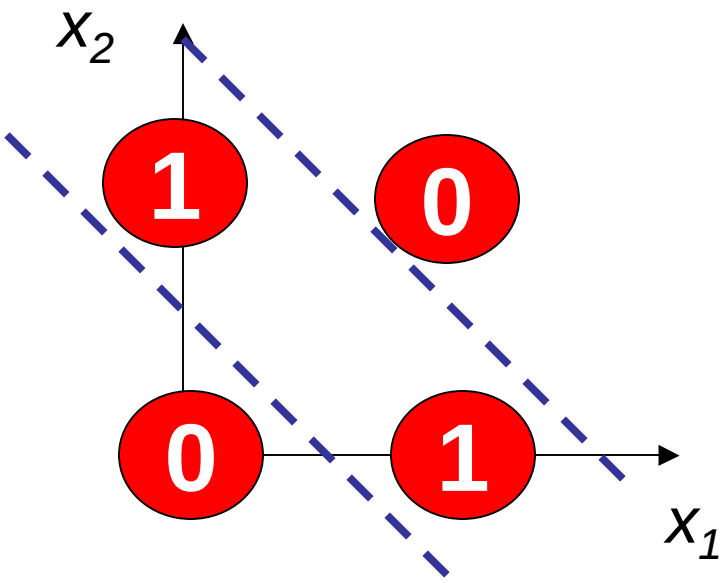
- El uso del Perceptrón o de las redes ADALINE permite aproximar de manera fácil, cualquier tipo de función o sistemas, sólo conociendo un conjunto de ejemplos.
- De esta manera cualquier sistema (caja negra), se puede representar por una red.
- Sin embargo, después de la década del 50 se demostró que estas técnicas poseen grandes limitaciones.
- Un ejemplo clásico es el OR Exclusivo.
- **CONCLUSION: éstas técnicas sólo pueden resolver sistemas donde los ejemplos son linealmente separables.**

Sin embargo...

Ø OR Exclusivo.



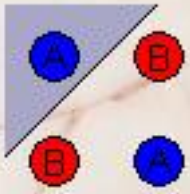
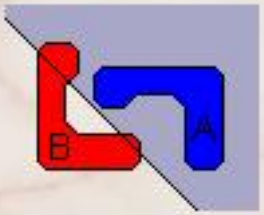
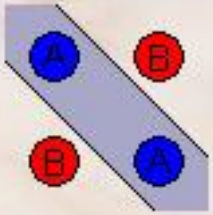
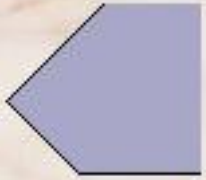
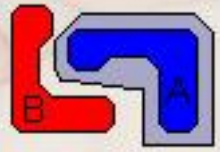




ØEl Perceptrón o ADALINE nunca convergen!!

ØSolución: varias redes en cascada **è** complejidad!!

Sin embargo...

Estructura	Regiones de Decisión	Problema de la XOR	Clases con Regiones Mezcladas	Formas de Regiones más Generales
1 Capa 	Medio Plano Limitado por un Hiperplano			
2 Capas 	Regiones Cerradas o Convexas			
3 Capas 	Complejidad Arbitraria Limitada por el Número de Neuronas			

Perceptrón Multicapa

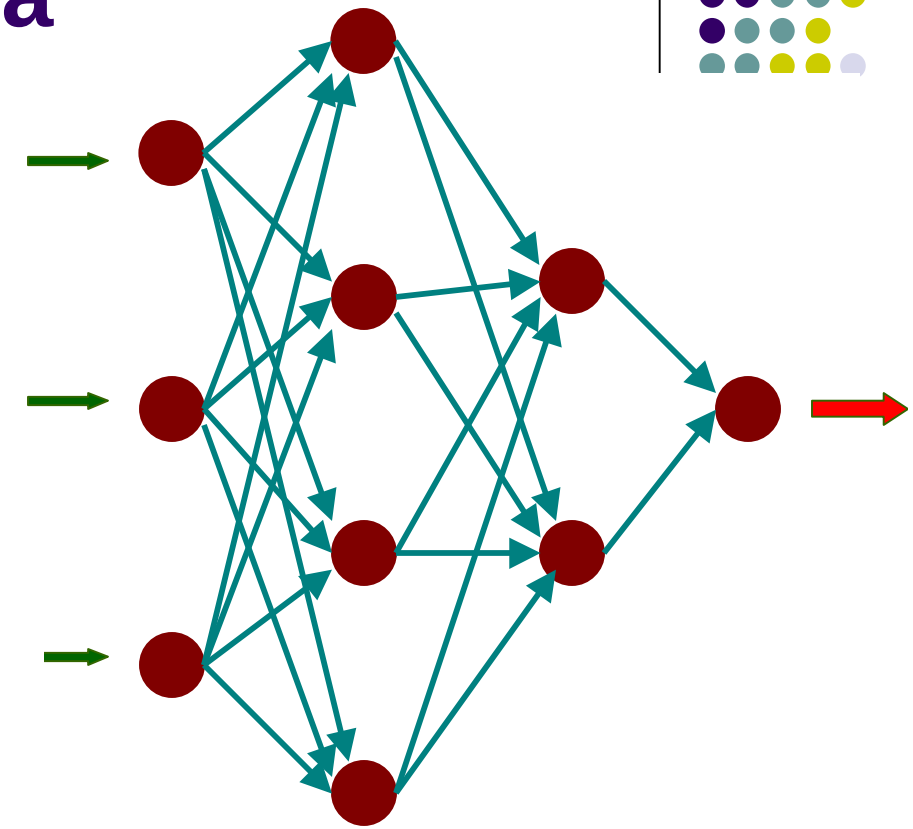
- Corresponde a una generalización del Perceptrón y Adaline
- 1969, Minsky & Papert mostraron que el uso de **varios perceptrones simples** (neuronas ocultas) **puede ser una solución** para problemas no lineales. Sin embargo **no dejaron en claro como se puede entrenar** (ajustar los pesos ocultos)
- 1986, Rumelhart & ..., presentó un método para retropropagar el error medido en la salida hacia las neuronas ocultas. Se denomina REGLA DELTA GENERALIZADA.
- 1989, Cybenko, Hornik, han demostrado que el Perceptrón Multicapa es un aproximador universal. Cualquier función continua sobre R^n, puede ser aproximada, con al menos una capa oculta.

Perceptrón Multicapa

- El Perceptrón Multicapa: puede aprender a partir de ejemplos, aproximar relaciones no lineales, filtrar ruido, modelar sistemas...
- Con éxito ha sido aplicado a:
  - Reconocimiento del habla (Cohen, 93)
  - Reconocimiento de caracteres (Sackinger, 92)
  - Reconocimiento de caracteres escritos (Guyon, 91)
  - Control de Procesos (Werbos, 89)
  - Modelamiento de Sistemas Dinámicos (Narendra, 90)
  - Conducción de vehículos (Pomerleau, 92)
  - Diagnósticos médicos (Baxt, 92)
  - Predicción de Series Temporales (Weiggend, 90)
  - Etc...

Perceptrón Multicapa

- Arquitectura:
  - CAPA DE ENTRADA
  - CAPAS OCULTAS
  - CAPA DE SALIDA



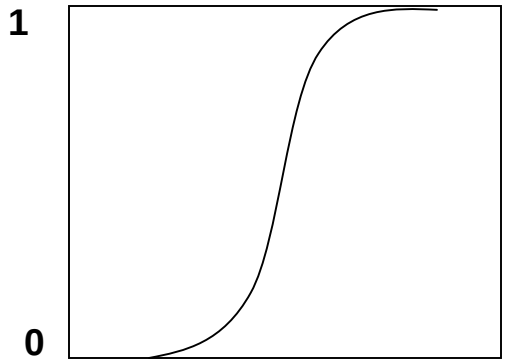
- Todas las neuronas transmiten información hacia delante: se denominan redes ***feedforward***
- Cada neurona posee un umbral independiente. Se considera como una entrada más cuya entrada es 1.
- Generalmente se utilizan redes completamente conectadas
- Función de activación de las neuronas: sigmoidal, hiperbólica.

Perceptrón Multicapa

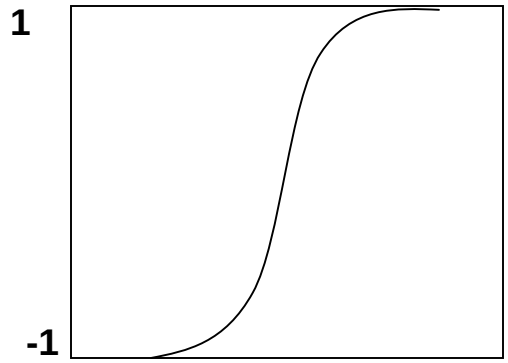
Ø Función de activación de las neuronas:

sigmoidal, hiperbólica **è** son equivalentes ($f_2=2f_1-1$)

Sigmoidal



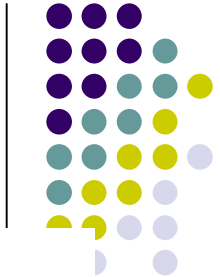
Hiperbólica



$$f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}} \qquad f(x)=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

La derivada de la f. Sigmoidal es: f(x)'=f(x)(1-f(x))

Perceptrón Multicapa



- Algoritmo BACKPROPAGATION:
  - Cada neurona de salida distribuye hacia atrás su error δ a las neuronas ocultas que se conectan a ella, ponderado por el valor de la conexión.
  - Cada neurona oculta recibe un δ de cada neurona de salida. La suma de estas es el término δ de la neurona oculta.
  - Se repite el proceso hacia atrás... Por ello el nombre "retropropagación del error".

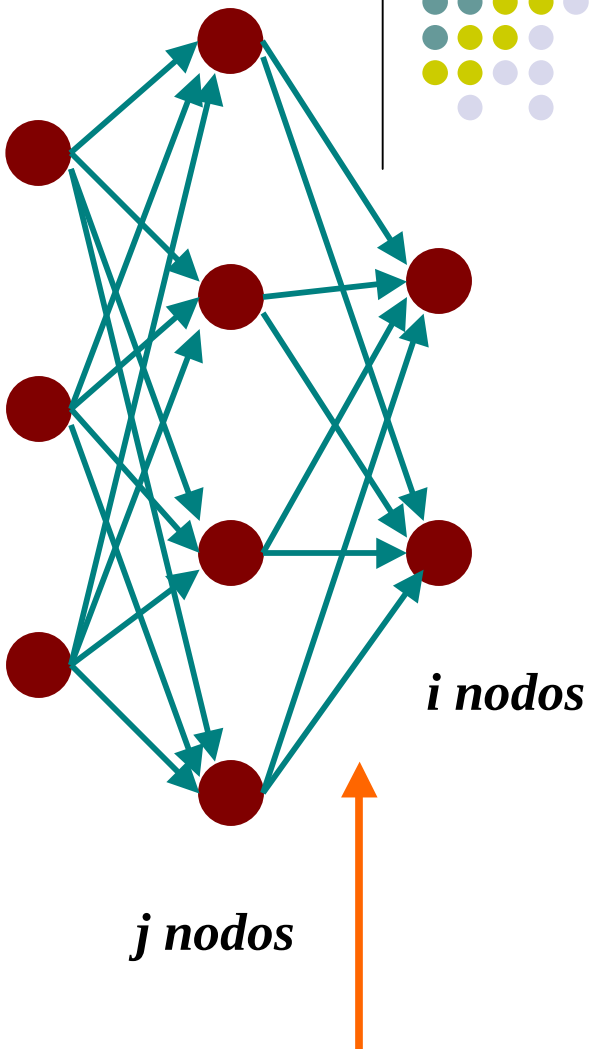
Perceptrón Multicapa

- Algoritmo BACKPROPAGATION:
  - Pesos de la capa oculta 1, y umbrales de la capa de salida:

$$w_{ji} = w'_{ji} + a \cdot d_i x_j$$

$$u_i = u'_i + a \cdot d_i$$

$$d_i = (s_i - y_i) \cdot y_i \cdot (1 - y_i)$$



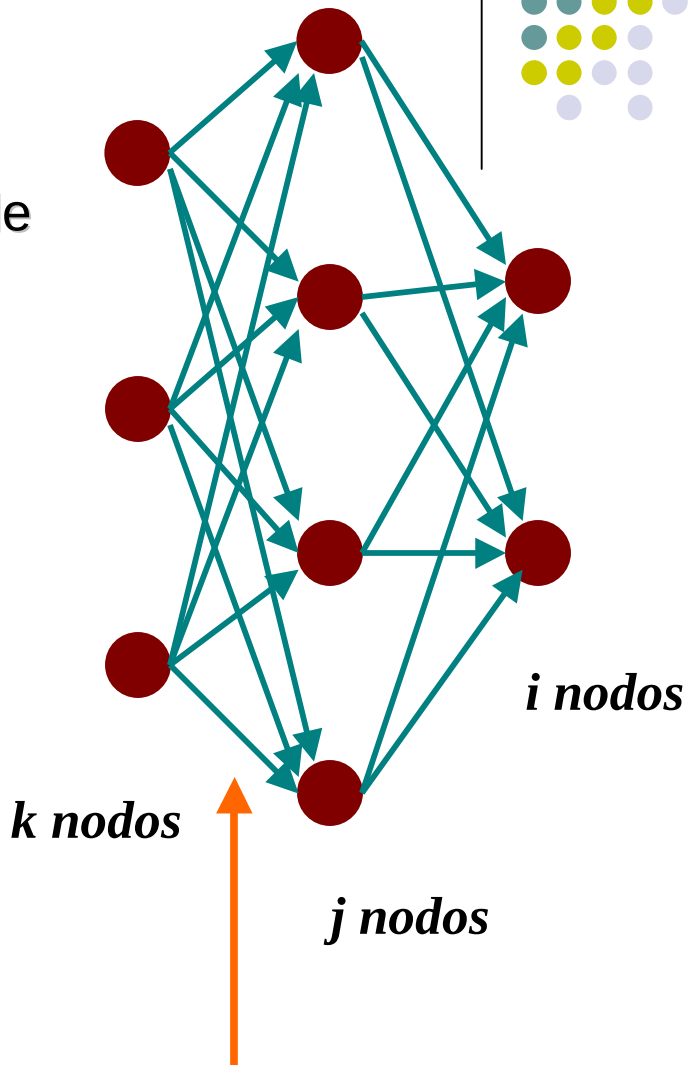
Perceptrón Multicapa

- Algoritmo BACKPROPAGATION:
  - Pesos de la capa entrada, y umbrales de la capa de salida:

$$w_{kj} = w'_{kj} + a \cdot d_j x_k$$

$$u_j = u'_j + a \cdot d_j$$

$$d_j = x_j(1-x_j)\sum_{\forall i} w_{ji} d_i$$



Perceptrón Multicapa

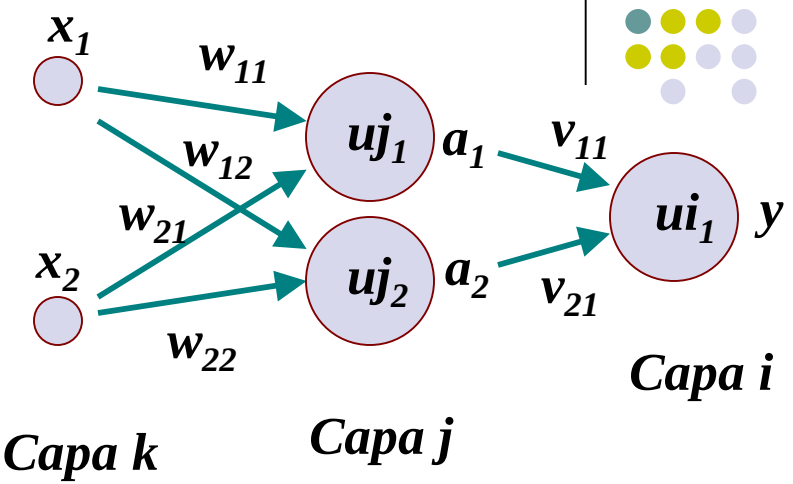
Ø Ejemplo: XOR

$$v_{11} = v_{11}^{'} + a \cdot d^{i} \cdot a_1$$

$$v_{12} = v_{12}^{'} + a \cdot d^{i} \cdot a_2$$

$$ui_1 = ui_1^{'} + a \cdot d^{i}$$

$$d^{i} = (s - y) \cdot y \cdot (1 - y)$$



Ø TAREA: Implementar esta pregunta de prueba.

$$w_{11} = w_{11}^{'} + a \cdot d_1^{j} \cdot x_1$$

...

$$uj_1 = uj_1^{'} + a \cdot d_1^{j}$$

$$d_1^{j} = a_1(1 - a_1) \sum_{\forall i} v_{1i} d^{i}$$