

Capítulo 4

TRANSFORMADAS DE IMAGEN

En el presente capítulo se tratarán los siguientes temas:

- 4.1 Introducción a la Transformada de Fourier.
- 4.2 Extensión a dos dimensiones.
- 4.3 La Transformada discreta de Fourier.
- 4.4 Transformada discreta de Fourier en dos dimensiones.
- 4.5 Algunas propiedades de la TF en dos dimensiones.
 - 4.5.1 Separabilidad
 - 4.5.2 Traslación
 - 4.5.3 Periodicidad y simetría conjugada.
 - 4.5.4 Rotación.
 - 4.5.5 Distributividad y escalamiento.
 - 4.5.6 Valor promedio.
 - 4.5.7 Laplaciano.
 - 4.5.8 Convolución.
 - 4.5.9 Correlación.

4.1 Introducción a la Transformada de Fourier.

Sea $f(x)$ una función continua de la variable real x . La Transformada de Fourier (TF) de $f(x)$, que se denota $\mathfrak{T}\{f(x)\}$ se define por:

$$\mathfrak{T}\{f(x)\} = F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-j2\pi\mu x} dx \quad (4.1)$$

dada $F(\mu)$, $f(x)$ puede obtenerse mediante la Transformada inversa de Fourier:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}^{-1}\{F(\mu)\} &= f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) \cdot e^{j2\pi\mu x} dx \end{aligned} \quad (4.2)$$

Las ecs. (4.1) y (4.2) se denominan el par de Transformada de Fourier y se puede demostrar que existen si $f(x)$ es continua e integrable y $F(\mu)$ es integrable; estas condiciones se satisfacen normalmente en aplicaciones prácticas.

En relación a imágenes, $f(x)$ será función real; la TF de una función real es, sin embargo, generalmente compleja, esto es:

$$F(\mu) = R(\mu) + jI(\mu) \quad (4.3)$$

donde $R(\mu)$ e $I(\mu)$ corresponden – respectivamente – a las componentes real e imaginaria de $F(\mu)$.

Una forma alternativa usual de expresar la ec. (4.3) es del tipo exponencial, esto es:

$$F(\mu) = |F(\mu)| \cdot e^{j\phi(\mu)} \quad (4.4)$$

donde

$$|F(\mu)| = \sqrt{R^2(\mu) + I^2(\mu)} \quad (4.5)$$

y

$$\phi(\mu) = \arctg\left(\frac{I(\mu)}{R(\mu)}\right) \quad (4.6)$$

La función de magnitud $|F(\mu)|$ se denomina Spectrum de Fourier de $f(x)$ y $\phi(\mu)$ su ángulo de fase.

El cuadrado del Spectrum:

$$\begin{aligned} E(\mu) &= |F(\mu)|^2 \\ &= R^2(\mu) + I^2(\mu) \end{aligned} \quad (4.7)$$

se denomina comúnmente Spectrum de Energía de $f(x)$.

La variable μ se denomina comúnmente variable frecuencia, hecho que deriva de la fórmula de Euler:

$$e^{-j2\pi\mu x} = \cos(2\pi\mu x) - j\text{sen}(2\pi\mu x) \quad (4.8)$$

Si se interpreta la integral de (4.1) como el límite de una sumatoria de términos discretos, resulta que $F(\mu)$ está compuesta por una sumatoria infinita de términos seno y términos coseno, y que cada valor de μ determina la frecuencia de su correspondiente par seno-coseno.

Ejemplo: Considérese una función simple como la de la figura 1a. Su T.F. se obtiene empleando la ecuación (4.1) como sigue:

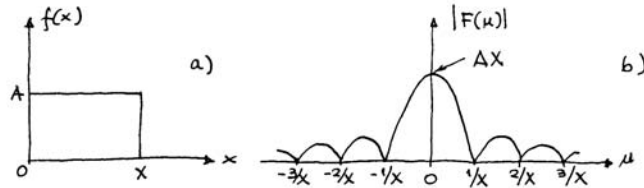


Fig1: Función simple (a) y su Spectrum de Fourier (b).

$$\begin{aligned} F(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-j2\pi\mu x} dx \\ &= \int_0^X A \cdot e^{-j2\pi\mu x} dx \\ &= \frac{-A}{j2\pi\mu} \left[e^{-j2\pi\mu x} \right]_0^X \\ &= \frac{-A}{j2\pi\mu} (e^{-j2\pi\mu X} - 1) \\ &= \frac{A}{j2\pi\mu} (e^{j\pi\mu X} - e^{-j\pi\mu X}) e^{-j\pi\mu X} \\ &= \frac{A}{\pi\mu} \text{sen}(\pi\mu X) e^{-j\pi\mu X} \end{aligned}$$

resultando una función compleja. El Spectrum de Fourier está dado por:

$$\begin{aligned} |F(\mu)| &= \left| \frac{A}{\pi\mu} \text{sen}(\pi\mu X) \right| |e^{-j\pi\mu X}| \\ &= AX \left| \frac{\text{sen}(\pi\mu X)}{\pi\mu X} \right| \end{aligned}$$

El gráfico de $F(\mu)$ se indica en la fig1b.

4.2 Extensión a dos dimensiones.

La transformada de Fourier puede ser extendida a una función $f(x, y)$ de dos variables.

Si $f(x, y)$ es continua e integrable y $F(\mu, \nu)$ es integrable, se tienen las condiciones suficientes para la existencia del siguiente par de Transformadas de Fourier.

$$\mathfrak{T}\{f(x, y)\} = F(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi(\mu x + \nu y)} dx dy \quad (4.9)$$

y

$$\mathfrak{T}^{-1}\{F(\mu, \nu)\} = f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu, \nu) \cdot e^{-j2\pi(\mu x + \nu y)} d\mu d\nu \quad (4.10)$$

donde μ y ν son las variables de frecuencia.

Tal como en el caso de una dimensión, el Spectrum de Fourier, y los de fase y energía, están dados, respectivamente, por:

$$|F(\mu, \nu)| = \sqrt{R^2(\mu, \nu) + I^2(\mu, \nu)} \quad (4.11)$$

$$\phi(\mu, \nu) = \arctg\left(\frac{I(\mu, \nu)}{R(\mu, \nu)}\right) \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} E(\mu, \nu) &= |F(\mu, \nu)|^2 \\ &= R^2(\mu, \nu) + I^2(\mu, \nu) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ejemplo: función de dos dimensiones $f(x, y)$ y su TF $F(\mu, \nu)$, graficadas en la fig2.

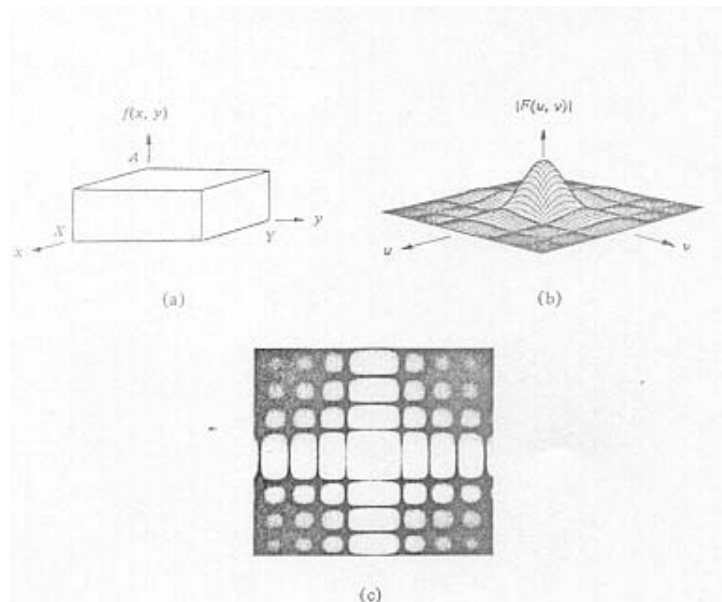


Fig2: a)Función de dos dimensiones.
 b) Su Spectrum de Fourier
 c)El Spectrum representado como una función de intensidad.

La TF de Fourier de $f(x, y)$ está dada por:

$$\begin{aligned}
 F(\mu, \nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi(\mu x + \nu y)} dx dy \\
 &= A \cdot \int_0^X e^{-j2\pi\mu x} dx \cdot \int_0^Y e^{-j2\pi\nu y} dy \\
 &= A \left[\frac{e^{-j2\pi\mu x}}{-j2\pi\mu} \right]_0^X \cdot \left[\frac{e^{-j2\pi\nu y}}{-j2\pi\nu} \right]_0^Y \\
 &= \frac{A}{-j2\pi\mu} (e^{-j2\pi\mu X} - 1) \cdot \frac{A}{-j2\pi\nu} (e^{-j2\pi\nu Y} - 1) \\
 &= AXY \left\{ \frac{\text{sen}(\pi\mu X) e^{-j\pi\mu X}}{\pi\mu X} \right\} \left\{ \frac{\text{sen}(\pi\nu Y) e^{-j\pi\nu Y}}{\pi\nu Y} \right\}
 \end{aligned}$$

Su Spectrum:

$$|F(\mu, \nu)| = AXY \left| \frac{\text{sen}(\pi\mu X)}{\pi\mu X} \right| \left| \frac{\text{sen}(\pi\nu Y)}{\pi\nu Y} \right|$$

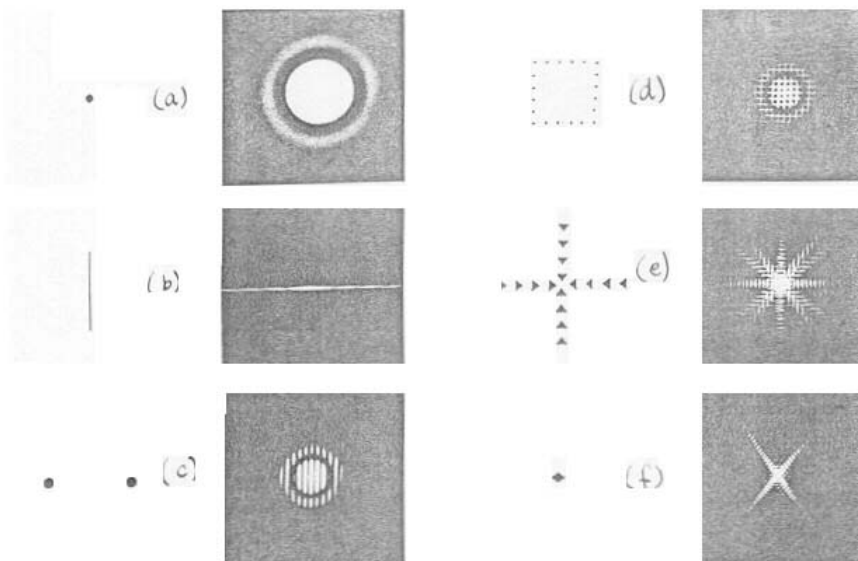


Fig3: Otros ejemplos de funciones de dos dimensiones. Algunas de ellas presentan, para su tratamiento matemático, un grado significativo de complejidad. Se presenta sólo el Spectrum final mediante una función gráfica de luminosidad.

4.3 La Transformada discreta de Fourier.

Supóngase que una función continua $f(x)$ es discretizada en una secuencia:

$$\{f(x_0), f(x_0 + \Delta x), f(x_0 + 2\Delta x), \dots, f(x_0 + [N - 1]\Delta x)\}$$

tomando N muestras uniformemente espaciadas en Δx unidades entre sí, tal como se muestra en la figura 4.

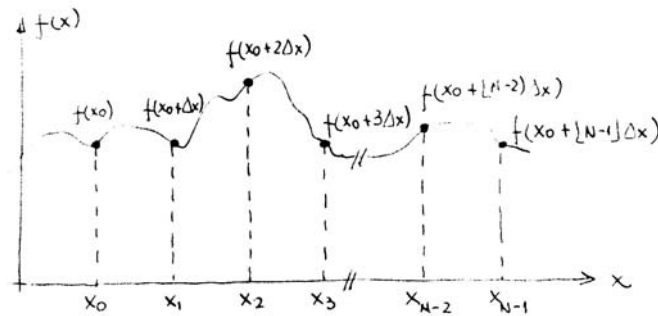


Fig4: Muestreo de una función continua $f(x)$.

Por conveniencia en todo lo que sigue, x será utilizada para representar tanto a una variable discreta como para una variable continua, lo que dependerá del contexto en que se esté trabajando.

La doble utilización de representación por x se puede hacer definiendo:

$$f(x) = f(x_0 + x\Delta x) \quad (4.14)$$

donde x asume ahora los valores discretos:

$$0, 1, 2, \dots, N-2, N-1.$$

Así, la secuencia:

$$\{f(0), f(1), f(2), \dots, f(N-2), f(N-1)\}$$

será utilizada para denotar el conjunto de N muestras uniformemente espaciadas de una correspondiente función continua.

Al emplear la notación descrita, se tiene que el par de TF discreta que se aplica para funciones muestreadas está dado por:

$$F(\mu) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cdot e^{-j2\pi\mu x / N} \quad (4.15)$$

donde $\mu = 0, 1, 2, \dots, N-2, N-1$.

$$f(x) = \sum_{\mu=0}^{N-1} F(\mu) \cdot e^{j2\pi\mu x / N} \quad (4.16)$$

para $x = 0, 1, 2, \dots, N-1, N-2$.

Los valores de $\mu = 0, 1, 2, \dots, N-2, N-1$ en la TF discreta dada en la ec. (4.15) corresponden a muestras de la transformada continua en los valores $0, \Delta\mu, 2\Delta\mu, \dots, (N-2)\Delta\mu, (N-1)\Delta\mu$.

Con lo anterior se ha hecho que $F(\mu)$ represente $F(\mu+\Delta\mu)$, en una notación similar a la utilizada para $f(x)$ discreta, con la diferencia que las muestras de $F(\mu)$ comienzan en el origen del eje de frecuencia. Puede demostrarse que $\Delta\mu$ y Δx se relacionan por:

$$\Delta\mu = \frac{1}{N\Delta x} \quad (4.17)$$

4.4 Transformada discreta de Fourier en dos dimensiones.

Para el caso de dos variables, el par de TF discreta está dado por:

$$F(\mu, \nu) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{\mu x}{M} + \frac{\nu y}{N}\right)} \quad (4.18)$$

para $\mu = 0, 1, 2, \dots, M-2, M-1$ y $\nu = 0, 1, 2, \dots, N-2, N-1$.

$$f(x, y) = \sum_{\mu=0}^{M-1} \sum_{\nu=0}^{N-1} F(\mu, \nu) \cdot e^{j2\pi\left(\frac{\mu x}{M} + \frac{\nu y}{N}\right)} \quad (4.19)$$

para $\mu = 0, 1, 2, \dots, M-2, M-1$ y $\nu = 0, 1, 2, \dots, N-2, N-1$.

El muestreo de una función continua se realiza ahora con una grilla bidimensional con espaciamiento de ancho Δx en el eje x y de ancho Δy en el eje y .

Tal como en el caso de una dimensión, la función discreta $f(x, y)$ representa muestras de la función $f(x_0 + x\Delta x, y_0 + y\Delta y)$ para valores $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$ e $y = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Lo mismo es válido para $F(\mu, \nu)$.

Los incrementos de muestreo en los dominios espacial y de frecuencia están relacionados por:

$$\Delta\mu = \frac{1}{M\Delta x} \quad (4.20)$$

$$\Delta\nu = \frac{1}{N\Delta y} \quad (4.21)$$

Cuando el muestreo se realiza mediante un arreglo cuadrado – lo que resulta en significativas simplificaciones o comodidad – se tiene $M=N$ y:

$$F(\mu, \nu) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi(\mu x + \nu y)/N} \quad (4.22)$$

para $\mu = \nu = 0, 1, 2, \dots, N-2, N-1$.

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} \sum_{\nu=0}^{N-1} F(\mu, \nu) \cdot e^{j2\pi(\mu x + \nu y)/N} \quad (4.23)$$

para $\mu = \nu = 0, 1, 2, \dots, N-2, N-1$.

Un término $1/N$ ha sido incluido en ambas expresiones; dado que $F(\mu, \nu)$ y $f(x, y)$ constituyen un par de TF, la agrupación de estos términos constantes multiplicativos es arbitraria.

Dado que en la práctica lo usual es la digitalización en arreglos cuadrados, las expresiones (4.22) y (4.23) se emplean de preferencia frente a las expresiones (4.18) y (4.19).

Los spectra de Fourier, de fase y de energía de funciones discretas uni y bidimensionales están dados –también– por las expresiones (4.5) a (4.7) y (4.11) a (4.13) respectivamente. La única diferencia es que las variables independientes son discretas.

Una diferencia notable respecto al caso de variables continuas radica en que –para variable(s) discreta(s)– $F(\mu)$ y $F(\mu, \nu)$ siempre existen.

Ejemplo: Para la aplicación simple de las ecuaciones (4.15) y (4.16) considérese la función de la figura 5(a).

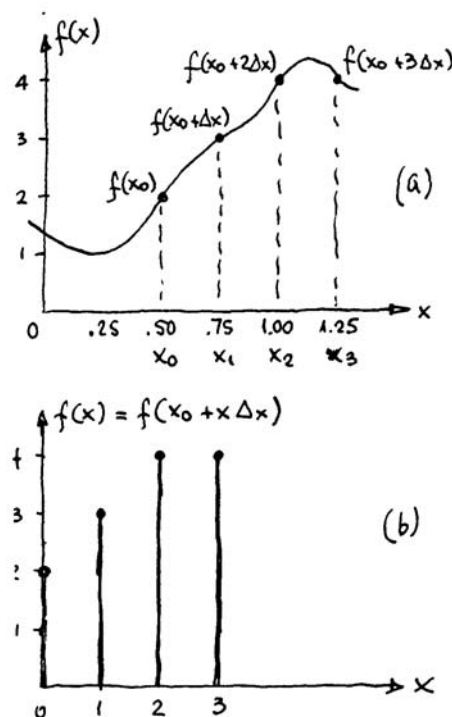


Fig5: Función simple muestreada en el dominio x .
(a) x variable continua.
(b) x variable discreta.

La aplicación de (4.15) a las muestras resultantes establece la siguiente secuencia de pasos:

$$\begin{aligned}
 F(0) &= \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) \cdot e^0 \\
 &= \frac{1}{4} [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)] \\
 &= \frac{1}{4} [2 + 3 + 4 + 4] \\
 &= 3.25
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F(1) &= \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) \cdot e^{-j2\pi x/4} \\
 &= \frac{1}{4} \left[2 \cdot e^0 + 3 \cdot e^{-j\pi/2} + 4 \cdot e^{-j\pi} + 4 \cdot e^{-j3\pi/2} \right] \\
 &= \frac{1}{4} [-2 + j]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F(2) &= \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) \cdot e^{-j4\pi x/4} \\
 &= \frac{1}{4} \left[2 \cdot e^0 + 3 \cdot e^{-j\pi} + 4 \cdot e^{-j2\pi} + 4 \cdot e^{-j3\pi} \right] \\
 &= \frac{-1}{4} [1 + j0] = \frac{-1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F(3) &= \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) \cdot e^{-j6\pi x/4} \\
 &= \frac{1}{4} \left[2 \cdot e^0 + 3 \cdot e^{-j3\pi/2} + 4 \cdot e^{-j3\pi} + 4 \cdot e^{-j9\pi/2} \right] \\
 &= \frac{-1}{4} [2 + j]
 \end{aligned}$$

Nótese que cada uno de los valores de $f(x)$ contribuye a cada término de la TF discreta. A la inversa, todos los términos de la transformada contribuyen a formar la transformada inversa al aplicar la ec. (4.16), en un procedimiento análogo al descrito.

El Spectrum de Fourier se obtiene de la magnitud de cada uno de los términos de la transformada, esto es:

$$|F(0)| = 3.25$$

$$|F(1)| = \sqrt{5}/4$$

$$|F(2)| = 1/4$$

$$|F(3)| = \sqrt{5}/4$$

4.5 Algunas propiedades de la TF en dos dimensiones.

Aunque el interés está centrado en la transformada discreta en dos dimensiones, los conceptos o principios sustentados en algunas de las propiedades de interés son comprendidas más fácilmente si se presentan inicialmente en referencia a la forma continua y unidimensional.

Otra consideración relevante se refiere al hecho que una de las formas más utilizadas para la representación gráfica es a través de funciones de intensidad (véase la figura 2(a)), obviando las evidentes dificultades de la alternativa "tridimensional" (Fig. 2b).

Debido a que, para la mayoría de las imágenes usuales, las componentes espectrales decrecen rápidamente al aumentar la frecuencia, resultan normalmente oscurecidas (pocos perceptibles) en las funciones de intensidad correspondientes.

Una técnica (práctica) empleada para superar la dificultad o inconveniente mencionado consiste en una compensación dada por:

$$D(\mu, \nu) = \log(1 + |F(\mu, \nu)|) \quad (4.24)$$

$D(\mu, \nu)$ definida según la ec. (4.24) es función no negativa y además preserva los valores nulos en el plano de frecuencia.

El uso del logaritmo resulta en una simplificación y útil reducción del rango dinámico requerido para la representación (nótese la analogía con el uso del decibel para la representación de razones o de magnitudes referenciadas).

Una visualización del efecto de aplicar la ec. (4.24) se presenta en la figura 6 mediante dos spectra de Fourier.

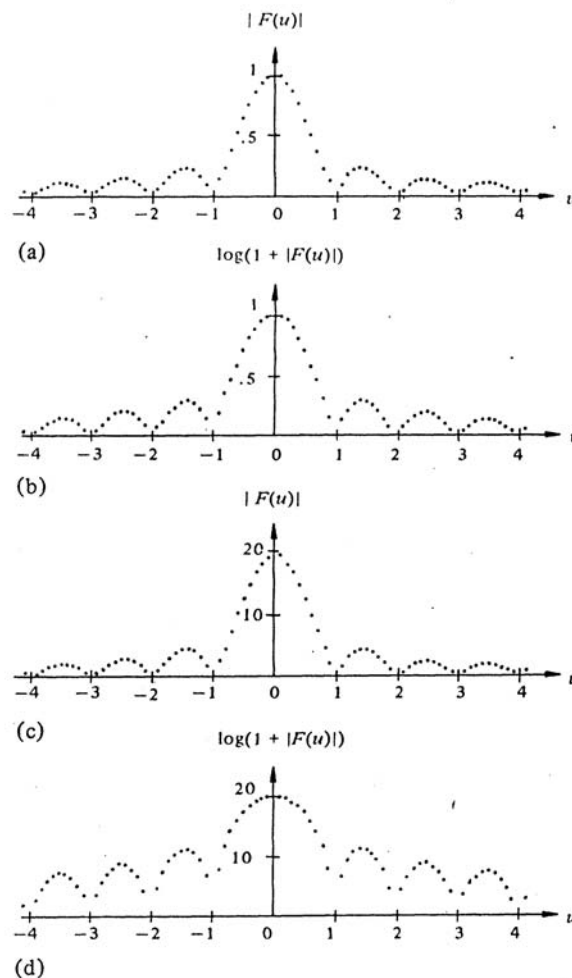


Fig6: Compensación de despliegue de funciones de intensidad.

Los spectra originales indicados en (a) y (c), son compensados aplicando la ec. (4.24) y luego normalizados, esto es, reescalando de modo de mantener el valor máximo. Los resultados aparecen en (b) y (d), respectivamente.

Particularmente el resultado obtenido en (d) indica claramente que, en un despliegue de función intensidad, los lóbulos laterales serán mucho más distinguibles (o brillantes) que si se hubiera utilizado directamente los valores del Spectrum original (c).

Un ejemplo de aplicación del procedimiento descrito que hace manifiesta la mejora obtenida en un despliegue de función intensidad se presenta en la figura 7, utilizando una imagen de Saturno.

La gran mayoría de las imágenes que se presentan e las figuras venideras han sido sometidas al proceso, siempre con el propósito de mostrar más claramente información que excede las posibilidades (de rango dinámico) del sistema de despliegue. También las imágenes presentadas en la figura 2c y Fig 3 han sido procesadas según lo descrito.

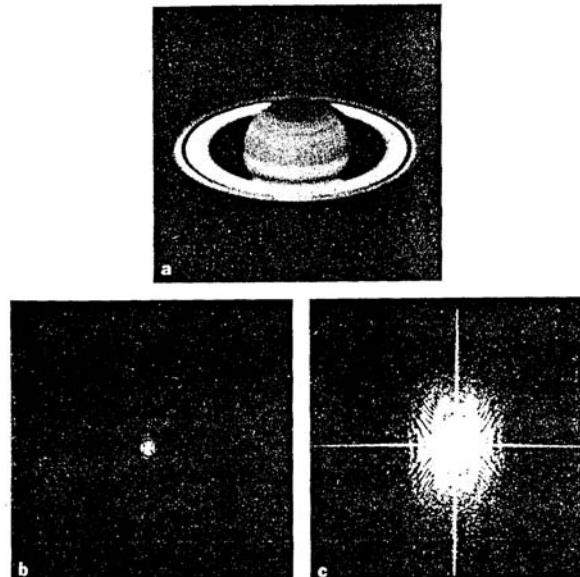


Fig7: a) Imagen original del planeta Saturno.
 b) Despliegue de intensidad del Spectrum sin procesamiento $|F(\mu, \nu)|$.
 c) Despliegue de la función intensidad del Spectrum procesado $D(\mu, \nu)$, reescalado a la misma escala de grises empleada en b).

Debe tenerse en cuenta que si bien el procesamiento descrito brinda excelentes resultados, su propósito es sólo mejorar la calidad del despliegue para un observador humano; cualquier procesamiento de la información debe ser realizada sobre el Spectrum original, no sobre el Spectrum procesado.

4.5.1 Separabilidad

El par de Transformada Directa de Fourier expresado en las ecuaciones (4.22) y (4.23) puede ser escrito en las formas separables siguientes:

$$F(\mu, \nu) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} e^{-\frac{j2\pi\mu x}{N}} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-\frac{j2\pi\nu y}{N}} \quad (4.25)$$

para $\mu, \nu = 0, 1, \dots, N-1$ y

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} e^{j2\pi\mu x} \sum_{\nu=0}^{N-1} F(\mu, \nu) e^{-j2\pi\nu y} \quad (4.26)$$

para $x, y = 0, 1, \dots, N-1$.

La principal ventaja –para los propósitos de interés– de la propiedad de Separabilidad radica en que tanto $F(\mu, \nu)$ como $f(x, y)$ pueden obtenerse en dos pasos por aplicación sucesiva de la Transformada de Fourier unidimensional o de su inversa.

La posibilidad descrita se puede hacer evidente expresando la ec. (4.25) como:

$$F(\mu, \nu) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} F(x, \nu) e^{-j2\pi\mu x} \quad (4.27)$$

donde

$$F(x, \nu) = N \left[\frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi\nu y} \right] \quad (4.28)$$

Para cada valor de x , la expresión entre paréntesis cuadrado es una transformada unidimensional con valores de frecuencia $\nu = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Entonces, la función bidimensional $F(x, \nu)$ se obtiene tomando la transformada a lo largo de cada fila de $f(x, y)$ y multiplicando el resultado por N .

El resultado deseado, $F(\mu, \nu)$, se obtiene tomando la transformada a lo largo de cada columna de $F(x, \nu)$, tal como se indica en la ec. (4.27).

El procedimiento se puede graficar según se indica en la figura 8:

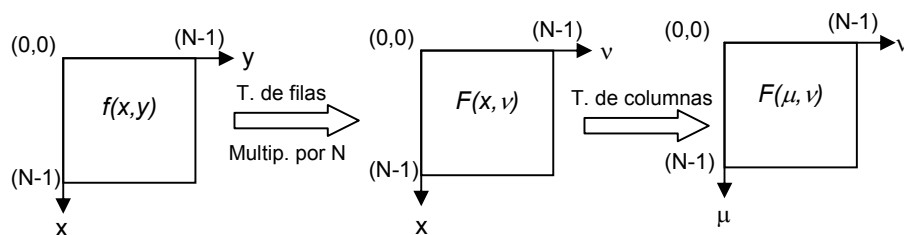


Fig8: Procedimiento de cálculo de la TF discreta en dos dimensiones como una serie de transformadas unidimensionales.

Debe notarse que igual resultado se obtiene si se forma primeramente las transformadas a lo largo de las columnas de $f(x, y)$ y luego a lo largo de las filas del resultado primero.

Lo descrito es igualmente válido para implementar el procedimiento de obtención de la transformada inversa según la ecuación (4.26).

4.5.2 Traslación

La propiedad de traslación del par de T.F. se expresa por:

$$f(x, y)e^{j2\pi(\mu_0x+v_0y)/N} \Leftrightarrow F(\mu - \mu_0, v - v_0) \quad (4.29)$$

y

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(\mu, v)e^{-j2\pi(\mu_0x+v_0y)/N} \quad (4.30)$$

donde la flecha (\Leftrightarrow) se usa para indicar la correspondencia entre una función y su T.F. (y viceversa), como se presentan en las ecuaciones (4.9) y (4.10) o en las ecuaciones (4.22) y (4.23).

La ecuación (4.29) muestra que al multiplicar $f(x,y)$ por el término exponencial indicado y obteniendo luego la transformada del producto, se produce un desplazamiento del origen en el plano de la frecuencia al punto (μ_0, v_0) .

De igual forma, la ecuación (4.30) muestra que al multiplicar $F(\mu, v)$ por el término exponencial anotado y obtener luego la transformada inversa del producto, se produce un desplazamiento del origen del plano del espacio al punto (x_0, y_0) .

En gran parte de los procedimientos que se describen más adelante se hará uso intensivo de esta propiedad con $\mu_0 = v_0 = N/2$.

Para el caso anotado se tendrá:

$$\begin{aligned} e^{j2\pi(\mu_0x+v_0y)/N} &= e^{j\pi(x+y)} \\ &= (-1)^{x+y} \end{aligned}$$

y

$$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F\left(\mu - \frac{N}{2}, v - \frac{N}{2}\right) \quad (4.31)$$

Así, el origen de la T.F. de $f(x,y)$ puede ser desplazado hasta el centro de su correspondiente cuadrado de $N \times N$ en frecuencia simplemente multiplicando $f(x,y)$ por $(-1)^{x+y}$. En el caso unidimensional el procedimiento se reduce a multiplicar $f(x)$ por el término $(-1)^x$.

Debe notarse, en la ec. (4.30), que un desplazamiento en $f(x,y)$ no altera la magnitud de su T.F. puesto que:

$$\left| F(\mu, v)e^{-j2\pi(\mu x_0 + v y_0)/N} \right| = |F(\mu, v)| \quad (4.32)$$

La observación anterior es un elemento que debe tenerse siempre presente dado que el análisis visual de la transformada –presentada como función intensidad– brinda sólo información de su magnitud.

4.5.3 Periodicidad y simetría conjugada.

La T.F. discreta y su inversa son periódicas, con período N , esto es:

$$F(\mu, v) = F(\mu + N, v) = F(\mu, v + N) = F(\mu + N, v + N) \quad (4.33)$$

La demostración se puede hacer por sustitución directa de las variables por $(\mu+N)$ y $(\nu+N)$ en la ec. (4.22).

Aunque la ec. (4.33) indica que $F(\mu,\nu)$ se repite a si misma para un número infinito de valores de μ y ν , sólo se requiere los N valores de cada variable en cualquier período para obtener $f(x,y)$ a partir de $F(\mu,\nu)$. En otros términos, basta un período de la transformada para tener completa especificación de $F(\mu,\nu)$ en el dominio de la frecuencia. Similares comentarios son válidos para $f(x,y)$ en el dominio espacial.

La T.F. también presenta simetría conjugada:

$$F(\mu,\nu) = F^*(-\mu,-\nu) \quad (4.34)$$

o, lo que es más interesante:

$$|F(\mu,\nu)| = |F(-\mu,-\nu)| \quad (4.35)$$

Tal como ha sido mencionado, el interés se centra normalmente en desplegar la magnitud de la T.F. para propósitos de interpretación. Para analizar las implicancias de las ecuaciones (4.33) y (4.35) en el despliegue de magnitud de la transformada conviene –por simplicidad– considerar primeramente el caso unidimensional donde:

$$F(\mu) = F(\mu + N) \quad \text{y}$$

$$|F(\mu)| = |F(-\mu)|$$

La propiedad de periodicidad indica que $F(\mu)$ tiene un período de largo N , y la propiedad de simetría muestra que la magnitud de la transformada está centrada en torno al origen, tal como se muestra en la fig 9:

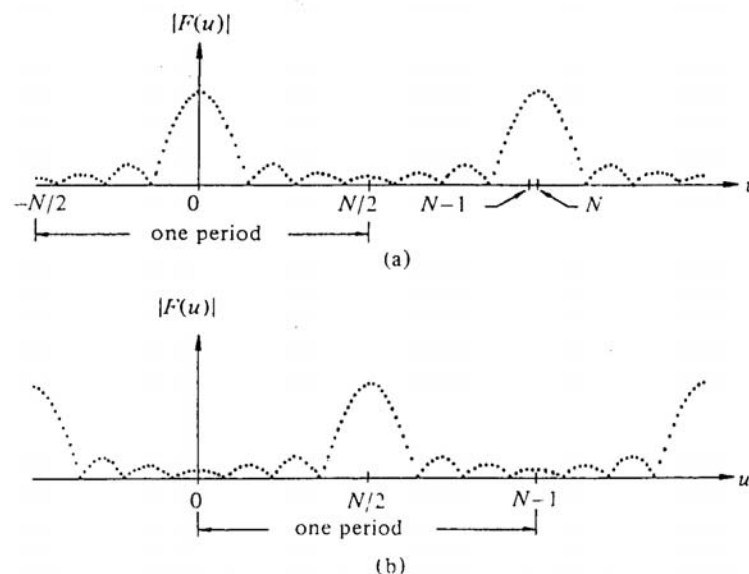


Fig9: Propiedades de la periodicidad y simetría.

- a) Spectrum de Fourier con semiperíodos espaldas con espaldas en el intervalo $(0, N-1)$
 b) Spectrum desplazado mostrando un período completo en el mismo intervalo.

De la observación de la figura y de los comentarios anteriores se concluye que las magnitudes de la transformada, valores desde $N/2$ hasta $N-1$ son imágenes de los valores en el semiperíodo a la izquierda del origen. Dado que la T.F. discreta ha sido formulada para valores de μ en el intervalo $(0, N-1)$, se observa que el resultado de tal formulación genera dos semiperíodos en dicho intervalo, los que están espalda contra espalda.

Para obtener el despliegue o visualización de un período completo basta con desplazar el origen de la transformada al punto $\mu=N/2$, como se muestra en la figura 9b. El desplazamiento se logra fácilmente, multiplicando $f(x)$ por $(-1)^x$ antes de obtener la transformada.

Lo anterior es extensible para magnitudes de la T.F. discreta en dos dimensiones, caso en que resulta muy necesario efectuar el (doble) desplazamiento hasta el punto de frecuencia $(N/2, N/2)$. La interpretación resulta difícil si no se efectúa el desplazamiento, como se muestra en la fig10.

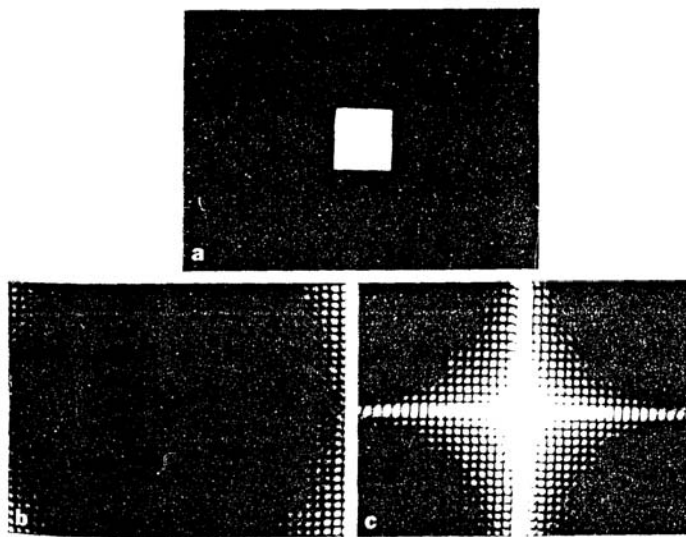


Fig10: a) Imagen de muestra simple.
 b) Spectrum de Fourier sin desplazar.
 c) Spectrum de Fourier desplazado hasta el centro del plano (cuadrado) de frecuencia.

Nótese cuanto más ilustrativa —a la inspección visual resulta la imagen c) en comparación con b).

4.5.4 Rotación.

Si se introducen coordenadas polares:

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta) \quad \mu = \omega \cos(\phi) \quad v = \omega \sin(\phi)$$

entonces $f(x, y)$ y $F(\mu, v)$ se convierten en $f(r, \theta)$ y $F(\omega, \phi)$, respectivamente. Se puede demostrar, por sustitución directa tanto en el par de TF continua como discreta, que:

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \phi + \phi_0) \quad (4.36)$$

En otras palabras, si $f(x, y)$ es rotada en un ángulo θ_0 , entonces $F(\mu, v)$ resulta rotada en el mismo ángulo (y viceversa). La fig11 ilustra la propiedad.

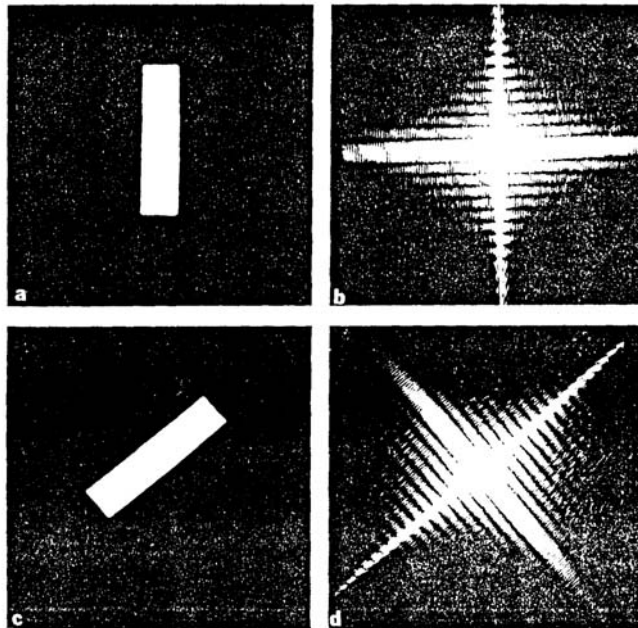


Fig11: Propiedades rotacionales de la T.F.
 a) Imagen simple.
 b) Spectrum de a), desplazado al centro.
 c) Imagen de a) rotada.
 d) Spectrum de c), desplazado al centro.

4.5.5 Distributividad y escalamiento.

Se deriva directamente de la definición de pares de T.F. discreta, que:

$$\mathfrak{F}\{f_1(x, y) + f_2(x, y)\} = \mathfrak{F}\{f_1(x, y)\} + \mathfrak{F}\{f_2(x, y)\} \quad (4.37)$$

y, en general, que:

$$\mathfrak{F}\{f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)\} \neq \mathfrak{F}\{f_1(x, y)\} \cdot \mathfrak{F}\{f_2(x, y)\} \quad (4.38)$$

es decir, la T.F. y su inversa son distributivas para la suma, pero no lo son para la multiplicación.

También se puede demostrar que para dos escalares a y b se cumple:

$$af(x, y) \Leftrightarrow aF(\mu, \nu) \quad (4.39)$$

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{\mu}{a} + \frac{\nu}{b}\right) \quad (4.40)$$

4.5.6 Valor promedio.

Una definición ampliamente utilizada del valor promedio de una función bidimensional discreta es:

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \quad (4.41)$$

sustituyendo $\mu = \nu = 0$ en la ec. (4.22) se tendrá:

$$F(0,0) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \quad (4.42)$$

de donde se obtiene la relación entre el valor promedio y la T.F:

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{N} F(0,0) \quad (4.43)$$

4.5.7 Laplaciano.

El Laplaciano de una función de dos variables se define:

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad (4.44)$$

De la definición de la T.F. en dos dimensiones se deduce:

$$\mathfrak{F}\{\nabla^2 f(x, y)\} \Leftrightarrow -(2\pi)^2 (\mu^2 + \nu^2) F(\mu, \nu) \quad (4.45)$$

Este operador resulta útil al delinear bordes o contornos de una imagen.

4.5.8 Convolución.

La convolución de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, que se denota $f(x) * g(x)$, está definida por la integral:

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) g(x - \alpha) d\alpha \quad (4.46)$$

donde α es una variable auxiliar de integración.

Debido a que la mecánica de la integral de convolución no es particularmente fácil de visualizar, el uso de la ec.(4.46) se ilustra gráficamente mediante dos ejemplos simples:

Ejemplo 1:

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ utilizadas en este ejemplo se muestran en la Figura 4.12 como (a) y (b) respectivamente.

Previo a la integración es necesario formar la función $g(x - \alpha)$. Esto se muestra en dos pasos mediante © y (d) en la figura 4.12.

Debe notarse que el procedimiento consiste simplemente en doblar o plegar $g(\alpha)$ en torno al origen para obtener $g(-\alpha)$ y luego desplazar esta última en x.

Entonces, para cualquier valor dado de x , se multiplica $f(\alpha)$ por el valor correspondiente de $g(x-\alpha)$ y se integra el producto desde $-\infty$ a $+\infty$. El producto de $f(\alpha)$ y $g(x-\alpha)$ es la porción sombreada de 4.12(c). Lo anterior es válido para $0 \leq x \leq 1$. Dado que el producto es nulo (cero) para valores de α fuera del intervalo $[0, x]$, se tiene que $f(x) * g(x) = x/2$, lo cual es simplemente el área de la región sombreada en la figura 4.12(c).

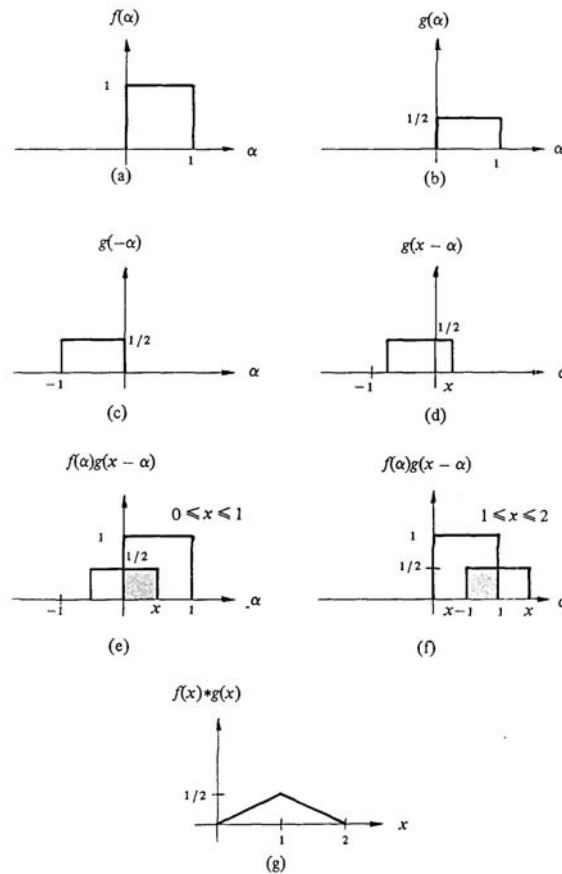


Fig 4.12: Ilustración gráfica de la convolución; las áreas sombreadas indican las regiones donde el producto es diferente de cero.

Para x en el intervalo $[1, 2]$ se aplica 4.12(f). En este caso, $f(x) * g(x) = (1 - x/2)$. Esto es, notando que $f(\alpha)g(x-\alpha)$ es nulo (cero) para valores de x fuera del intervalo $[0, 2]$, se tendrá:

$$f(x) * g(x) = \begin{cases} x/2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - x/2 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$

El resultado se indica en 4.12(g).

Un aspecto de la ec. (4.46) que será útil posteriormente involucra la convolución de una función $f(x)$ con una función impulso $\delta(x-x_0)$, lo que se define por la relación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0) \quad (4.47)$$

La función $\delta(x-x_0)$ se puede interpretar teniendo área unitaria en un entorno infinitesimal alrededor de x_0 y siendo de valor cero para todo otro x ; esto es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)dx = \int_{-x_0}^{x_0} \delta(x-x_0)dx = 1 \quad (4.48)$$

En la gran mayoría de los casos de aplicación se puede decir que $\delta(x-x_0)$ se localiza en $x = x_0$. Por ejemplo si $f(x) = A$ se tendrá que $A\delta(x-x_0)$ es un impulso de fuerza A en $x = x_0$.

Es práctica común representar los impulsos gráficamente por una flecha ubicada en x_0 y con una magnitud o altura igual a la fuerza del impulso. La figura 4.13 muestra la representación de $A\delta(x-x_0)$.

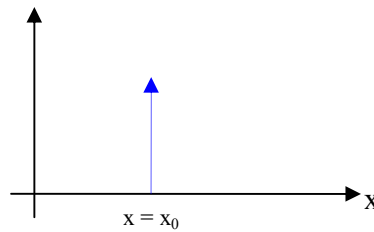


Fig 4.13: Representación gráfica de $A\delta(x-x_0)$.

Ejemplo 2

Supóngase ahora que una función $f(x)$, como la que se muestra en la figura 4.14(a) se convoluciona con $g(x) = \delta(x+T) + \delta(x) + \delta(x-T)$, que se muestra en la figura 4.14(b).

Al doblar $g(x)$, deslizarla sobre $f(x)$, y haciendo uso de las ecuaciones (4.46) y (4.47), se obtiene el resultado presentado en 4.14(c).

Debe notarse que en este caso la convolución resulta en una "copia" de $f(x)$ en la localización de cada impulso.

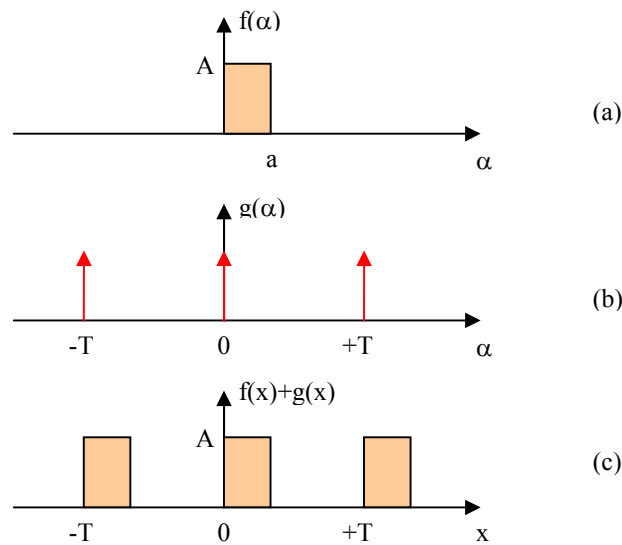


Fig. 4.14: Convolución con función impulsos.

La importancia de la convolución para análisis en el dominio de la frecuencia radica radica en el hecho que $f(x)*g(x)$ y $F(\mu)G(\mu)$ constituyen un par de transformadas de Fourier. En otros términos, si $f(x)$ tiene la T.F. $F(\mu)$ y $g(x)$ tiene la T.F. $G(\mu)$, entonces $f(x)*g(x)$ tiene por T.F. $F(\mu)G(\mu)$.

Lo anterior se establece formalmente por:

$$f(x)*g(x) \Leftrightarrow F(\mu)G(\mu) \quad (4.49)$$

indicando que la convolución en el dominio x puede obtenerse como la T.F.Inversa del producto $F(\mu)G(\mu)$.

Análogamente, la convolución en el dominio de la frecuencia se reduce a una multiplicación en el dominio x , esto es:

$$f(x)g(x) \Leftrightarrow F(\mu)*G(\mu) \quad (4.50)$$

El par de resultados (4.49) y (4.50), se conocen como el Teorema de Convolución.

Caso discreto.

Supóngase ahora que, en vez de ser continuas, $f(x)$ y $g(x)$ están discretizadas en arreglos maestres de tamaño A y B respectivamente:

$$\begin{aligned} &\{f(0), f(1), f(2), \dots, f(A-1)\} \\ &\{g(0), g(1), g(2), \dots, g(B-1)\} \end{aligned}$$

Recordando que, como se anota en 4.5.3, tanto la TF discreta como su inversa son funciones periódicas, en orden a formular el teorema de convolución para el caso discreto, se puede asumir que las funciones discretas $f(x)$ y $g(x)$ son periódicas, con algún período M . La

convolución resultante será entonces periódica con igual período. La cuestión es cómo elegir un valor para M.

Se ha demostrado (analogía con el T. de Nyquist) que, para evitar traslape debe elegirse

$$M \geq A + B - 1 \quad (4.51)$$

El traslape referido se conoce también como error de envolvimiento.

Si $M = A+B-1$, los períodos serán adyacentes; si $M > A+B-1$, los períodos resultarán espaciados entre sí, con separación igual a la diferencia entre M y $(A+B-1)$.

Debido a que el período asumido (M) debe ser mayor que tanto A como B, el largo de las secuencias muestreadas debe ser incrementado de modo que ambas sean de largo M. Esto puede lograrse agregando ceros a las muestras dadas para formar las siguientes (muestras) secuencias extendidas:

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq A-1 \\ 0 & A \leq x \leq M-1 \end{cases}$$

$$g_e(x) = \begin{cases} g(x) & 0 \leq x \leq B-1 \\ 0 & B \leq x \leq M-1 \end{cases}$$

Basados en lo anterior, se puede definir la convolución discreta de $f_e(x)$ y $g_e(x)$ mediante:

$$f_e(x) * g_e(x) = \sum_{m=0}^{M-1} f_e(m) g_e(x-m) \quad (4.52)$$

para $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$.

La función convolución es un arreglo discreto y periódico de largo M, con los valores $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$ describiendo un período completo de $f_e(x) * g_e(x)$.

La mecánica (operatoria) de la convolución discreta es básicamente la misma de la convolución continua. Las únicas diferencias están en que los desplazamientos ocurren en incrementos discretos, correspondientes a la separación entre muestras, y que la integración se reemplaza por una sumatoria. En forma similar, las ecs(4.49) y (4.50) siguen siendo válidas para el caso discreto en el que, para evitar error de envolvimiento (wraparound), se usa $f_e(x)$ y su transformada, igualmente $g_e(x)$ y su transformada. Las variables discretas x y μ asumen valores en el rango $0, 1, 2, \dots, M-1$.

Ejemplo.

Las consideraciones y planteamientos anteriores se ilustran gráficamente en la Fig 4.15 para convolución continua y convolución discreta.

Los diagramas para el caso discreto presentan A muestras, tanto para $f(x)$ como $g(x)$, en el intervalo $[0,1]$, así como un período asumido de $M=A+B-1=2A-1$.

Debe notarse que la función convolución es periódica y que, dado que $M=2A-1$, los períodos son adyacentes.

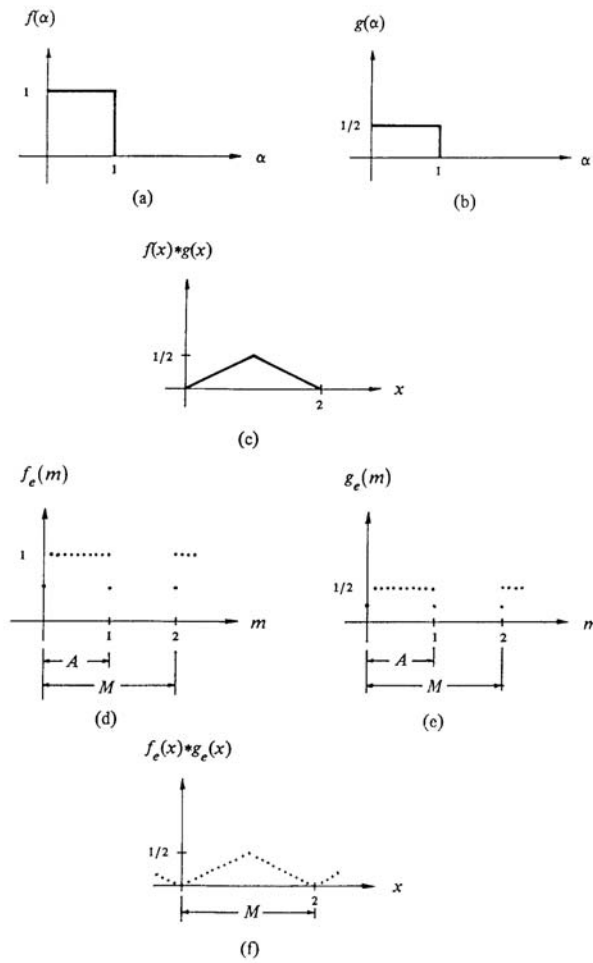


Fig 4.15: Convolución continua y convolución discreta.

Debe haberse elegido $M > 2A - 1$ se habría producido una separación entre los períodos. Es también importante notar que un período resulta descrito completamente por M muestras.

Caso de 2 dimensiones.

La convolución en dos dimensiones es análoga en su forma a la ec.(4.46).

Para dos funciones de dos dimensiones $f(x,y)$ y $g(x,y)$, se tiene:

$$f(x, y) * g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) g(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \tag{4.53}$$

El teorema de la convolución para 2 dimensiones está así dado por las relaciones:

$$f(x, y) * g(x, y) \Leftrightarrow F(\mu, \nu) G(\mu, \nu) \tag{4.54}$$

$$f(x, y) g(x, y) \Leftrightarrow F(\mu, \nu) * G(\mu, \nu) \tag{4.55}$$

La ec. (4.53) es más difícil de ilustrar gráficamente que su similar de una dimensión (4.46).

La figura 4.16 presenta un ejercicio básico de las operaciones de doblar, desplazar y multiplicar requeridas para la convolución en 2 dimensiones. El resultado de variar las variables de desplazamiento, x e y , sería una superficie (2 dimensiones) de convolución cuya forma dependerá de la naturaleza de las funciones involucradas en el proceso.

La convolución discreta en dos dimensiones se formula haciendo que $f(x,y)$ y $g(x,y)$ sean arreglos discretos de dimensiones $A \times B$ y $C \times D$ respectivamente.

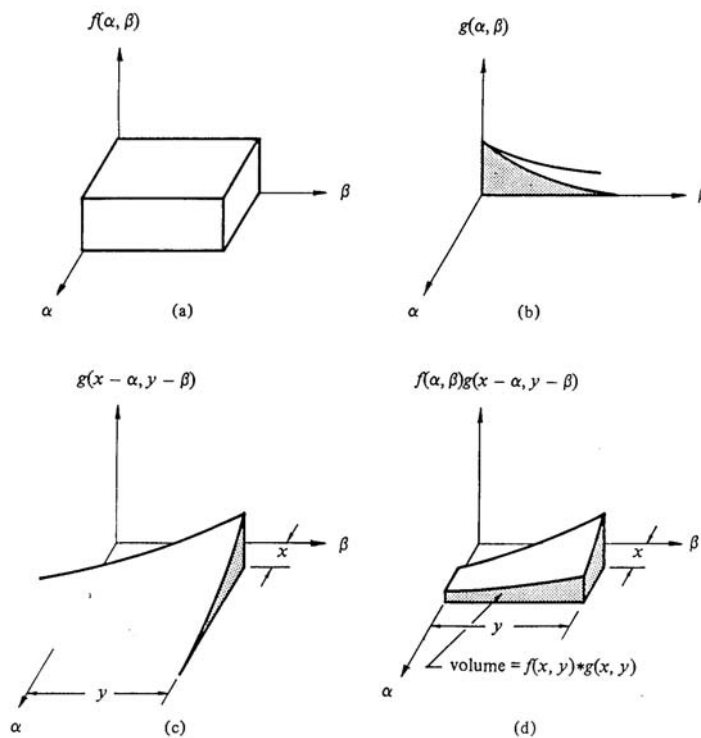


Fig 4.16: Ilustración del proceso de convolución en dos dimensiones.

Tal como en el caso de una dimensión, estos arreglos deben suponerse periódicos con algún período M y N en las direcciones x e y respectivamente. El error de envolvimiento en los períodos individuales de convolución se previene o evita si se elige:

$$M \geq A + C - 1 \tag{4.56}$$

$$N \geq B + D - 1 \tag{4.57}$$

Las secuencias periódicas se forman con períodos que resultan de extender $f(x,y)$ y $g(x,y)$ agregando ceros (tal como en el caso unidimensional):

$$f_e(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & 0 \leq x \leq A-1 \quad y \quad 0 \leq y \leq B-1 \\ 0 & A \leq x \leq M-1 \quad o \quad B \leq y \leq N-1 \end{cases}$$

$$g_e(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & 0 \leq x \leq C-1 \quad y \quad 0 \leq y \leq D-1 \\ 0 & C \leq x \leq M-1 \quad o \quad D \leq y \leq N-1 \end{cases}$$

Entonces, la convolución de dos dimensiones de las funciones (secuencias extendidas) $f_e(x, y)$ y $g_e(x, y)$ está dada por:

$$f_e(x, y) * g_e(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_e(m, n) g_e(x-m, y-n) \quad (4.58)$$

para $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$ e $y = 0, 1, 2, \dots, N-1$

El arreglo de $M \times N$ que resulta de la ec. (4.58) es un período de la convolución discreta en dos dimensiones.

Si M y N se eligen según las ec. (4.56) y (4.57), se garantiza que este período estará libre de interferencias provenientes de otros períodos adyacentes.

Tal como en el caso continuo, en el que se replica el par del teorema de convolución al pasar al caso discreto, es una dimensión, ahora, en el caso de dos dimensiones, las ecs del teorema (4.54) y (4.55) también se aplican para el caso discreto con $\mu = 0, 1, 2, \dots, M-1$ y $\nu = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Todos los cálculos involucran las funciones extendidas $f_e(x, y)$ y $g_e(x, y)$.

El interés por el teorema de convolución se comprenderá al tratar el Teorema del Muestreo.

Para aplicaciones prácticas, resulta más conveniente o fácil el cálculo de la convolución discreta mediante el producto en el plano de frecuencia en vez de usar directamente la ec.(4.58). El procedimiento consiste en calcular las TF de $f_e(x, y)$ y $g_e(x, y)$ usando un algoritmo para Transformada Rápida de Fourier (FFT: Fast Fourier Transform). Las dos TF obtenidas se multiplican y luego se obtiene la TF inversa del producto, que corresponde a la función convolución.

4.5.9 Correlación.

La correlación de dos funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$, que se denota $f(x) \circ g(x)$, está definida por:

$$f(x) \circ g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) g(x + \alpha) d\alpha \quad (4.59)$$

Nótese la similitud de la ecuación (4.59) con la ec. (4.46), siendo la única diferencia que no hay doblado de $g(x)$ en torno al origen. Así, para realizar la correlación, simplemente se desliza $g(x)$ por $f(x)$ y se integra el producto desde $-\infty$ hasta $+\infty$, para cada valor de desplazamiento x .

El procedimiento de la correlación se ilustra en la figura 4.17:

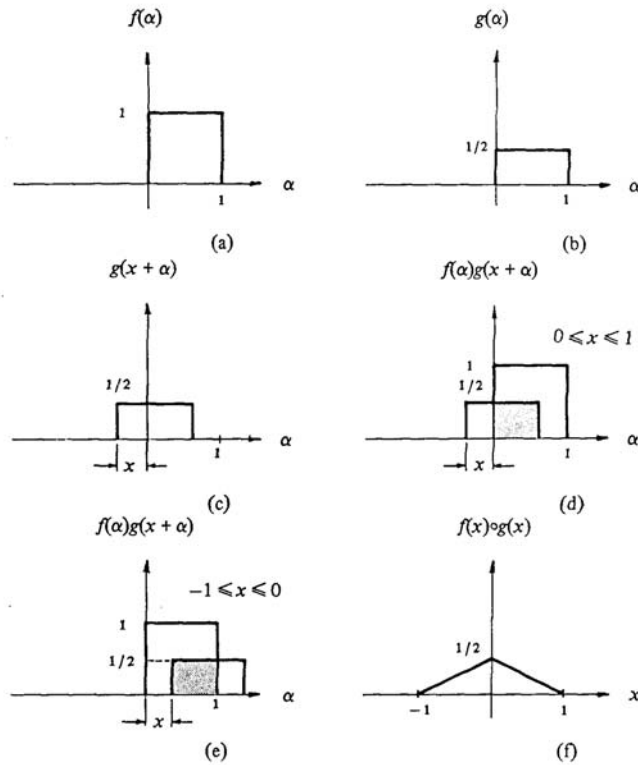


Fig. 4.17: Ilustración gráfica de la correlación.

Nota: Si $f(x)$ y $g(x)$ son una misma función, la ec. (4.59) suele denominarse función de autocorrelación; si $f(x)$ y $g(x)$ son diferentes, se usa normalmente el término correlación cruzada (crossrelation).

La figura 4.17 puede compararse con la figura 4.12 que ilustró el proceso de convolución.

Para el caso discreto, la función correspondiente de la ec. (4.59) es:

$$f_e(x) \circ g_e(x) = \sum_{m=0}^{M-1} f_e(m)g_e(x+m) \tag{4.60}$$

para $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$.

Los mismos comentarios y conclusiones anteriores referidos a las funciones extendidas $f_e(x, y)$ y $g_e(x, y)$, la periodicidad asumida para dichas funciones y la elección de valor para M , se aplican para la ec. (4.60).

Las similitudes se extienden también al caso de dos variables (dos dimensiones). Así, si $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son funciones de variables continuas, su correlación se define por:

$$f(x, y) \circ g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta)g(x + \alpha, y + \beta)d\alpha d\beta \tag{4.61}$$

y para el caso discreto:

$$f(x, y) \circ g(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_e(m, n) g_e(x+m, y+n) \quad (4.62)$$

para $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$ e $y = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Tal como para la convolución discreta $f_e(x, y)$ y $g_e(x, y)$ son funciones extendidas, y M y N se eligen de acuerdo a las ecuaciones (4.56) y (4.57) para evitar error de envolvimiento en los períodos de la función correlación.

Se puede demostrar que, tanto para el caso continuo como para el caso discreto, se cumple con el siguiente Teorema de Correlación:

$$f(x, y) \cdot g(x, y) \Leftrightarrow F(\mu, \nu) G^*(\mu, \nu) \quad (4.61)$$

$$f(x, y) g^*(x, y) \Leftrightarrow F(\mu, \nu) \circ G(\mu, \nu) \quad (4.62)$$

donde el asterisco (*) representa el complejo conjugado de la función.

Se debe recordar que la interpretación de las ecuaciones (4.61) y (4.62) para el caso discreto supone que las funciones –todas– son extendidas y periódicas.

Una de las aplicaciones prácticas más relevante de la correlación en el procesamiento de imágenes se refiere al pareamiento de prototipos o plantillas, en problemas consistentes en encontrar la mejor similitud entre una imagen bajo análisis y un conjunto de imágenes de origen conocido. Una forma de enfrentar la tarea es calcular la correlación entre la imagen bajo análisis con cada una de las imágenes prototipo o plantilla. La mayor similitud corresponde a aquella imagen que genera a una función correlación de mayor valor. Dado que las funciones de correlación calculadas son bidimensionales, debe explorarse toda el área para búsqueda del mayor valor.

Tal como en el caso de la convolución discreta, el cálculo de $f_e(x, y) \circ g_e(x, y)$ es logrado normalmente en forma más eficiente trabajando en el dominio de la frecuencia, usando algún algoritmo de FFT para obtener las transformadas de cada función y también la transformada inversa del producto obtenido.