Capítulo 5

MUESTREO

De modo preliminar -y casi intuitivo- en el capítulo 3 (3.1) se presentó la idea de muestreo. Contando ahora con herramientas como la Transformada de Fourier y el Teorema de Convolución, es posible abordar un tratamiento analítico algo más riguroso.

El interés debe centrarse en la cuestión de cuántas muestras deben ser tomadas de modo que dicho proceso no signifique pérdida de información. En otras palabras, el problema consiste en establecer bajo qué condiciones de muestreo es posible recuperar una imagen continua desde un conjunto de valores muestreados.

Los temas a tratar son:

5.1 Muestreo: Funciones unidimensionales.

5.2 Muestreo: Funciones de dos dimensiones.

5.1 Funciones unidimensionales.

Considérese la función f(x) de la Fig 5.1(a) y supóngase que se extiende desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

Supóngase –además- que la T.F de f(x) se extingue para valores de μ fuera del intervalo [-w,w], pudiendo mostrar una apariencia como la de (b). Una función cuya T.F tiene esta propiedad, para cualquier valor finito de W, se denomina de “banda limitada”.

Para lograr una versión muestreada de f(x) se puede simplemente multiplicarla por una funicón muestreadora de s(x), que consiste en un tren de impulsos espaciados Δx entre sí, como se muestra en (c).

De acuerdo al T. de Convolución la multiplicación en el dominio x corresponde a la convolución en el dominio frecuencia, obteniéndose la T.F. de (f) para el producto f(x)s(x).

Debe notarse que la transformada es periódica, con período 1/Δx, y que las apariciones repetidas de $F(\mu)$ pueden traslaparse, lo que ocurrirá si la separación 1/2Δx es menor.

Para evitar el traslapo debe seleccionarse el intervalo de muestreo Δx de modo que :

$$\Delta x \leq \frac{1}{2W} \qquad (5.1)$$

Nota: Debe recordarse que la T.F. es una función compleja. La fig 5.1 muestra sólo la magnitud de las transformadas, para simplificar.

El resultado de achicar Δx se muestra en (g) y en (h), planos de x y de μ, respectivamente. El efecto neto es el de separar los períodos de la transformada de modo que no se produzca traslapo.

La importancia de lo anterior radica en el hecho que si se multiplica la transformada de (h) por la función:

$$G(\mu) = \begin{cases} 1 & -w \leq \mu \leq w \\ 0 & o.c. \end{cases} \qquad (5.2)$$

se logra aislar completamente $F(\mu)$, tal como se muestra en (k).

La transformada inversa devuelve la función continua original f(x). Este resultado de poder recuperar completamente una función continua de banda limitada desde muestras cuyo espaciamiento satisface la ec. (5.1) se conoce como el Teorema del muestreo de Whittaker-Shannon.

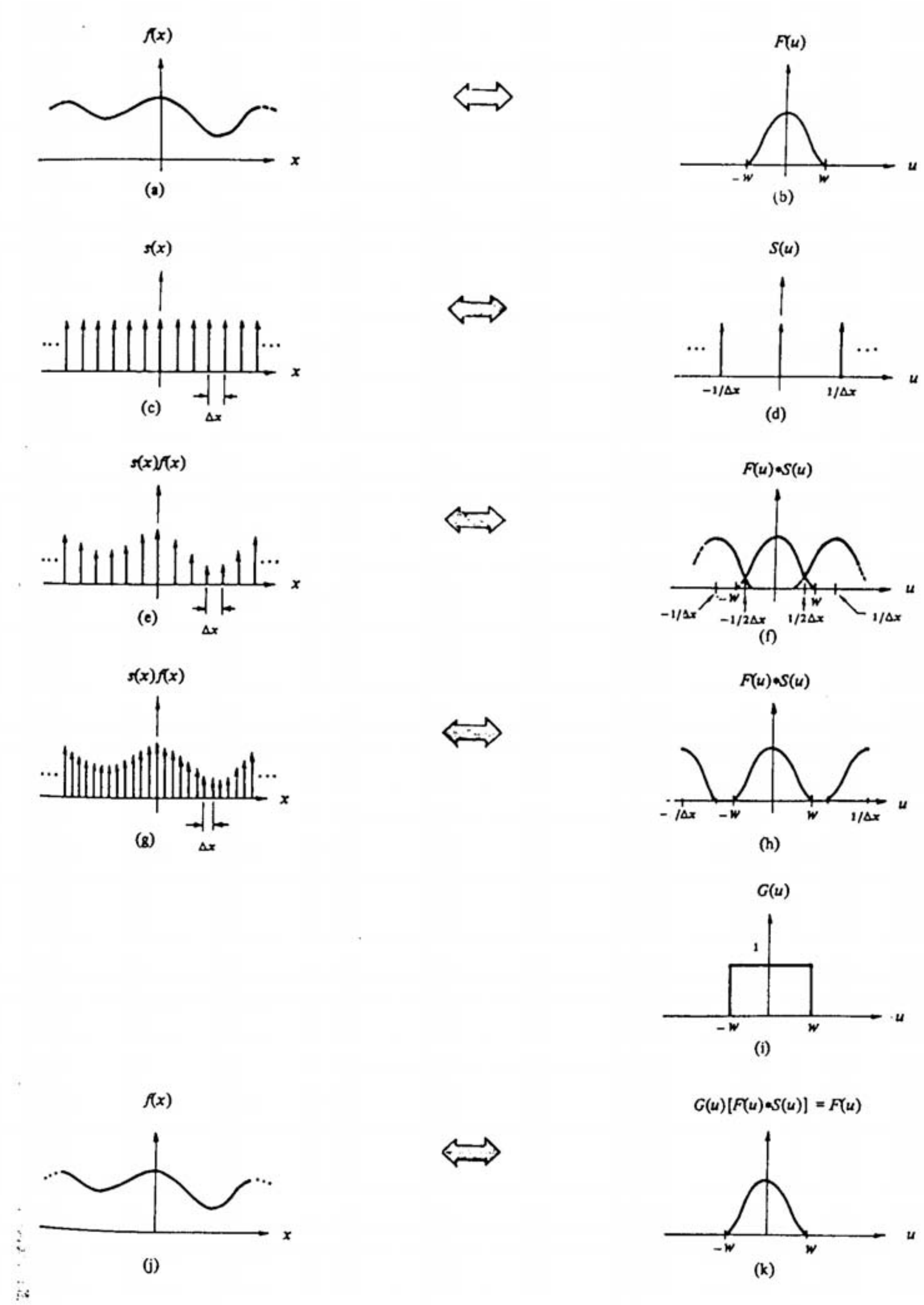

Fig. 5.1: Presentación gráfica de muestreo.

Es importante recordar que toda la información en el dominio de frecuencia de una función de banda limitada está contendida en el intervalo [-w,w]. Si no se satisface la ec. (5.1) la transformada en dicho intervalo estará contaminada por contribuciones de los períodos adyacentes. Este fenómeno conocido como “error de alias” (aliasing) impide la completa recuperación de una función sub-muestreada.

Los resultados y conclusiones precedentes se aplican a funciones de duración limitada en el dominio x. Puesto que el muestreo implicaría un tiempo infinito, el interés debe concentrarse en examinar el caso práctico en que el período o intervalo de observación (muestreo) es finito. La situación se presenta en la figura 5.2.

Las figuras (de Fig. 5.2) desde (a) hasta (f) son las mismas de la figura 5.1, con la excepción de que ahora la separación entre muestras cumple con la ec. (5.1) y –por lo tanto- no se presenta error de alias.

Un intervalo de muestreo finito [0,x] es el que aparece en (g), con su transformada en (h). Esta función (a menudo llamada "ventana") se describe por:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq X \\ 0 & otro\ x \end{cases} \tag{5.3}$$

esta función h(x) multiplica –en el dominio x- al producto previo f(x)s(x), generándose (i) con transformada (j).

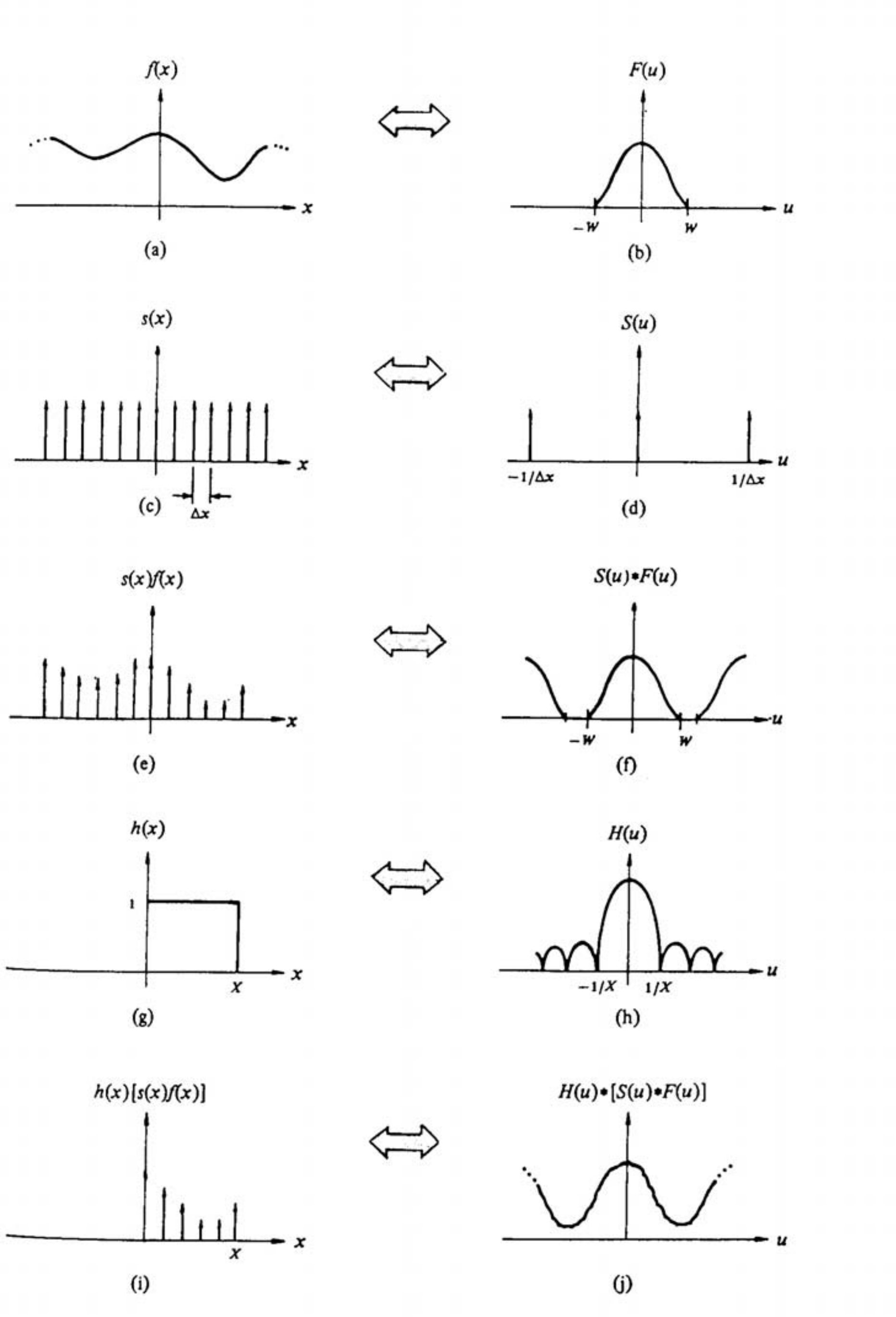

Fig 5.2: Muestreo finito.

Así, debe destacarse que el último resultado en el dominio de frecuencia se obtiene de la convolución de $S(\mu)*F(\mu)$ con $H(\mu)$ dado que esta última tiene componentes espectrales que se extienden al infinito, la convolución de estas funciones introduce distorsión en el dominio frecuencia cuando se representa una función que ha sido muestreada y luego limitada por h(x).

Así, aunque la separación entre muestras satisface el Teorema de Muestreo (ec 5.1), es imposible la recuperación exacta y completa de la función original en el dominio x. Esto puede apreciarse notando que resulta imposible, bajo estas condiciones, aislar la T.F. original. La única excepción a esto ocurre cuando f(x) es de banda limitada y periódica de período X; puede demostrarse que las combinaciones debidas a $H(\mu)$ se cancelan, permitiendo la recuperación de f(x).

También es importante notar que la función recuperada aún se extiende desde $-\infty$ hasta $+\infty$ en el dominio x.

Lo anterior es de relevancia práctica pues establece una limitante fundamental en el tratamiento de funciones digitales.

Antes de abordar el tema del muestreo de funciones de dos dimensiones conviene aprovechar los resultados y conclusiones anteriores para entregar una justificación adicional del carácter periódico de la T.F. discreta:

> Debe notarse primeramente que –hasta ahora- todos los resultados en el dominio de la frecuencia han sido de naturaleza continua. Para obtener una transformada discreta, simplemente se “muestrea” la transformada continua con un tren de impulsos espaciados en $\Delta\mu$ entre sí. La situación se ilustra en la Fig 5.3, a partir de (i) y (j) de la figura 5.2

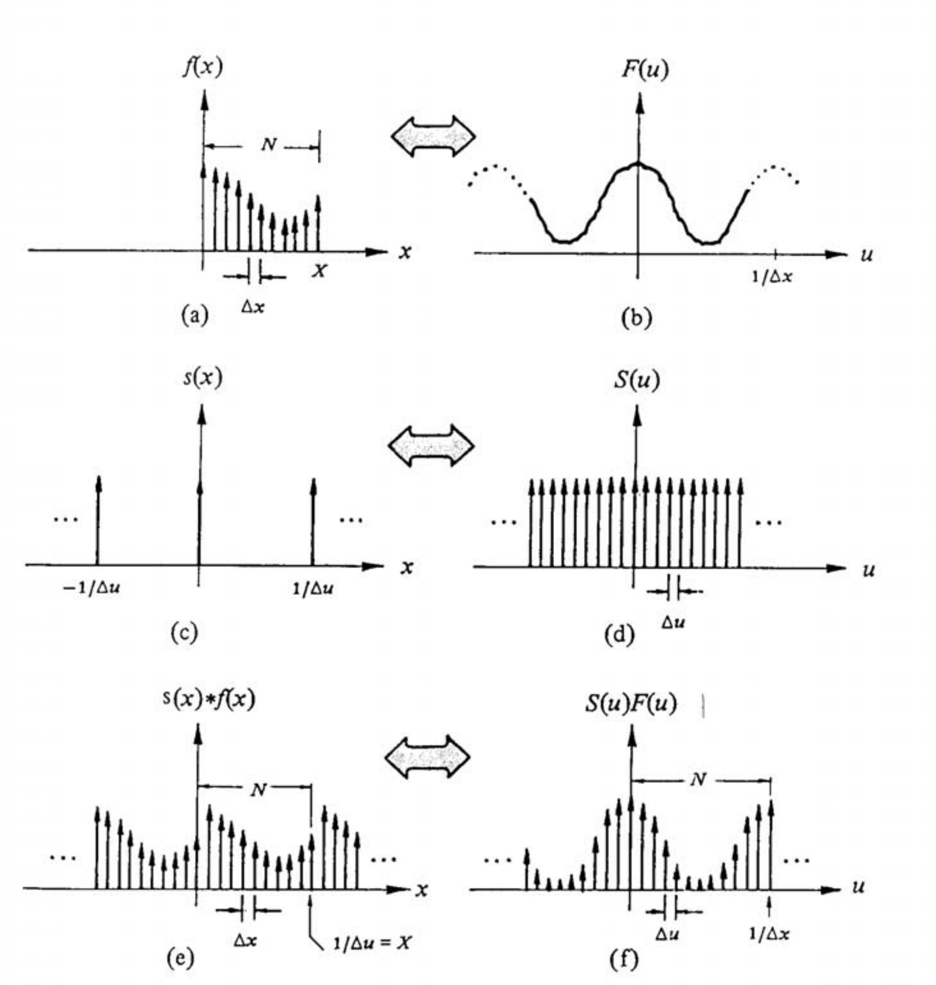

Fig 5.3: Ilustración gráfica de la T.F. discreta.

Se utiliza la notación $f(x)$ y $F(\mu)$ para facilitar la asociación con los desarrollos del capítulo 4. Sin embargo, debe tenerse presente que en la Fig (5.3), (a) y (b) se suponen son el resultado de la secuencia de operaciones presentadas en la Fig 5.2.

Como se mencionó, el muestreo puede ser representado por la multiplicación del tren de impulsos por la función de interés. En este caso se multiplica $F(\mu)$ por $S(\mu)$ y se obtiene lo indicado en (f). La operación equivalente en el dominio x es la convolución, la que resulta en la función que se presenta en (e). Esta función es periódica, con período $1/\Delta\mu$.

Si N muestras de $f(x)$ y $F(\mu)$ son tomadas y los espaciamientos entre ellas elegidos de modo de cubrir completamente un período en el correspondiente dominio, se tendrá $N\Delta x=X$ en el dominio x y $N\Delta\mu=1/\Delta x$ en el dominio de frecuencia.

Se deduce que:

$$\Delta\mu = \frac{1}{N\Delta x} \tag{5.4}$$

lo que concuerda con la ecuación (4.17) (lo mismo).

Eligiendo el espaciamiento señalado por la ec. (5.4) se genera lo indicado en (e) de la figura5.3, que es una función periódica, con período $1/\Delta\mu$.

De la ec. (5.4) se tiene $1/\Delta\mu = N\Delta x = X$, que corresponde al intervalo muestreado, según (a).

5.2 Funciones de dos dimensiones.

Los conceptos desarrollados en lo anterior son, con las necesarias modificaciones en la notación, directamente aplicables a funciones bidimensionales. El proceso de muestreo de estas funciones puede ser formulado matemáticamente haciendo uso de la función impulso bidimensional $\delta(x,y)$, que se define:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int f(x,y)\delta(x-x_0,y-y_0)dxdy = f(x_0,y_0) \tag{5.5}$$

La interpretación de la ec. (5.5) es análoga a la presentada para las ecs. (4.47) y (4.48).

La Fig. 5.4 presenta la función f(x,y), secuencia bidimensional de impulsos.

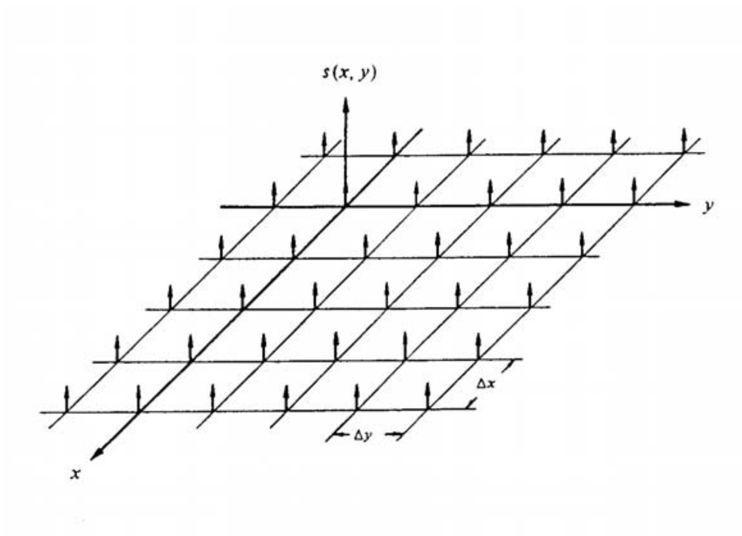

Fig 5.4: Función muestreo bidimensional.

Dada una función bidimensional f(x,y), donde x e y son continuas, una función muestreada de ella se obtiene formando el producto s(x,y)f(x,y). La operación equivalente en el dominio frecuencia es la convolución de $S(\mu,\nu)$ y $F(\mu,\nu)$, donde $S(\mu,\nu)$ es un tren de impulsos con separación $1/\Delta x$ en la dirección μ, y separación $1/\Delta y$ en la dirección ν.

Si f(x,y) es de banda limitada (es decir , su T.F. se desvanece fuera de una región finita, R), el resultado de la convolución de $S(\mu,\nu)$ y $F(\mu,\nu)$ se verá como se muestra en la Fig. 5.5. Debe notarse que la función es periódica en (las) dos dimensiones.

Sean $2W_\mu$ y $2W_\nu$, los anchos en las direcciones μ y ν, respectivamente, del rectángulo más pequeño que encierra completamente la región R.

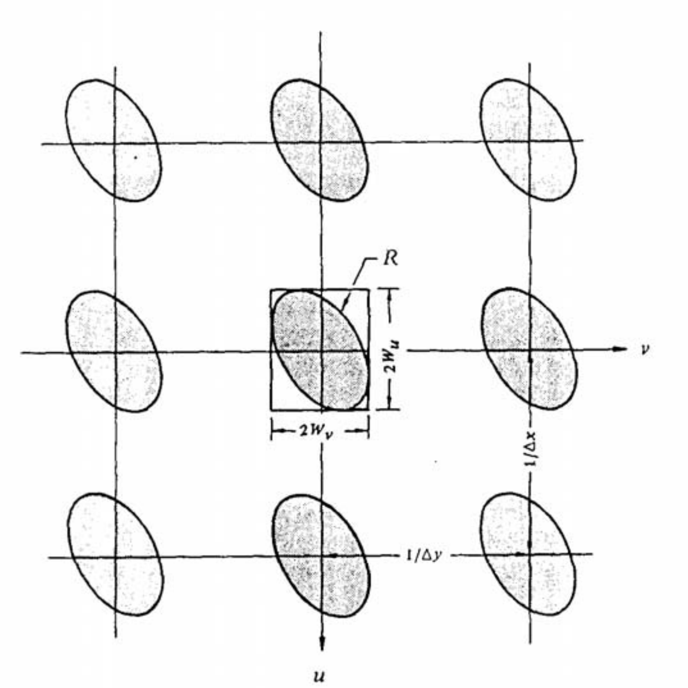

Fig 5.5: Representación en el dominio de frecuencia de una función bidimensional de banda limitada, muestreada.

De la Fig 5.5 si $1/\Delta x > 2W_\mu$ y $1/\Delta y > 2W_\nu$ (evitando error de alias), uno de los períodos puede ser recuperado completamente si se multiplica la convolución $S(\mu,\nu)*F(\mu,\nu)$ por la función $G(\mu,\nu)$, definida como:

$$G(\mu,\nu)=\begin{cases} 1 & \text{dentro de uno de los rectángulos que encierran R} \\ 0 & \text{todo otro } (\mu,\nu) \end{cases} \tag{5.6}$$

La transformada inversa de $G(\mu,\nu)S(\mu,\nu)*F(\mu,\nu)$ devuelve $f(x,y)$.

Las consideraciones anteriores permiten formular el Teorema del Muestreo Bidimensional, el que establece que una función de banda limitada $f(x,y)$ puede ser completamente recuperada desde muestras cuya separación está dada por:

$$\begin{aligned} \Delta x &\le 1/2W_\mu \\ \Delta y &\le 1/2W_\nu \end{aligned} \tag{5.7}$$

Cuando $f(x,y)$ es limitada espacialmente empleando una ventana bidimensional $h(x,y)$, análoga a la función h(x) de la Fig 5.2, se tendrá también el problema de distorsión en la transformada debido a la convolución de $H(\mu,\nu)$ y $S(\mu,\nu)*F(\mu,\nu)$. Esta distorsión, que aparece debido a la naturaleza de limitación espacial de las imágenes digitales, impide la recuperación completa de $f(x,y)$ desde sus muestras. Tal como en el caso unidimensional, la excepción está dada por las funciones periódicas, pero tales imágenes son rara vez encontradas en la práctica.

Una argumentación similar a la empleada para el caso unidimensional puede plantearse para mostrar como surge la periodicidad en la T.F. discreta bidimensional.

Para una imagen de NxN, el análisis resulta en:

$$\begin{aligned} \Delta\mu &= 1/N\Delta x \\ \Delta v &= 1/N\Delta y \end{aligned} \tag{5.8}$$

Las relaciones de la ec. (5.8) garantizan que un período (bidimensional) completo será recuperado o cubierto por N x N muestras uniformemente espaciadas en los dominios espacial y de frecuencia.