

Formateo PCM

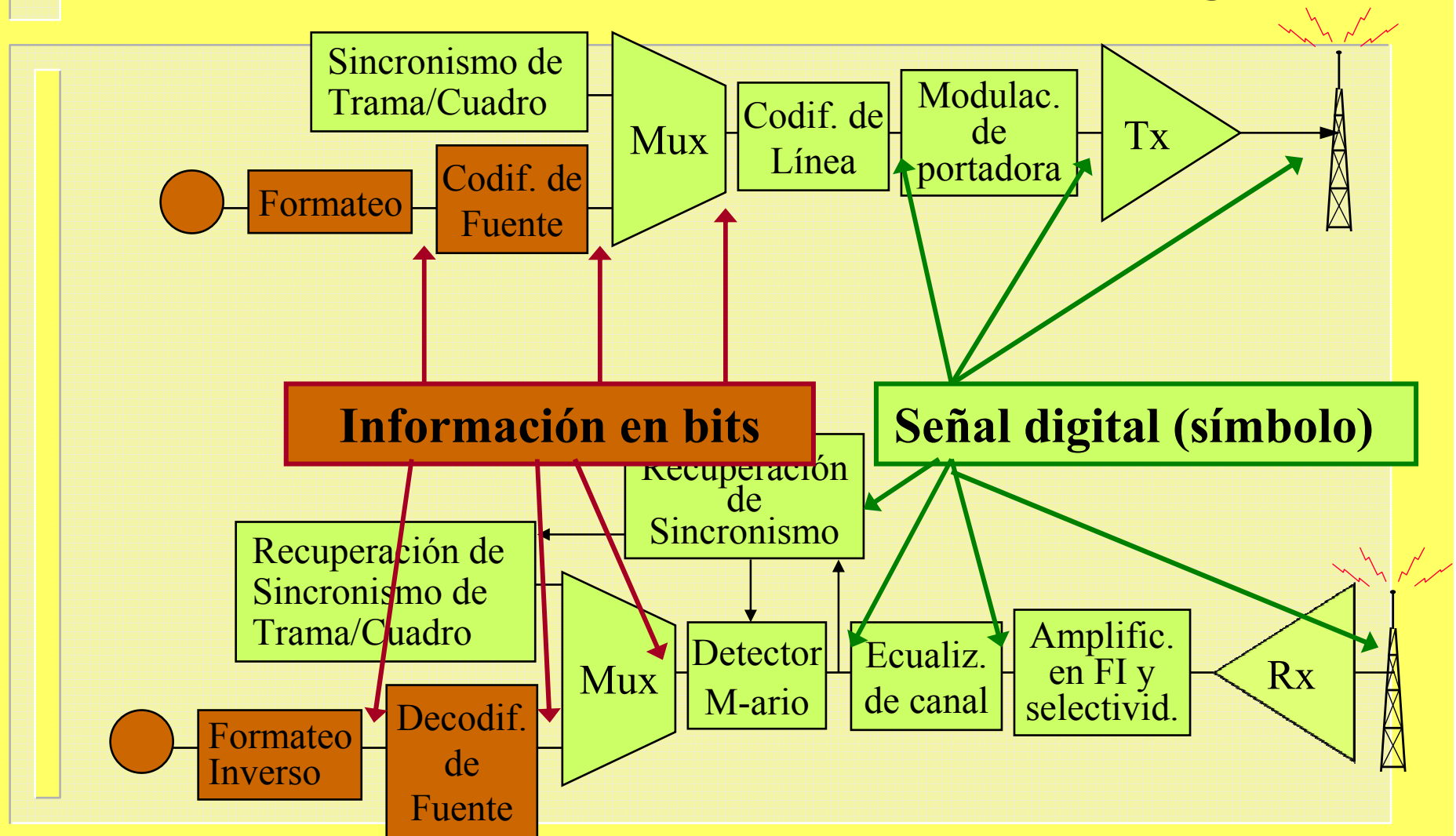
L.Couch III, “*Sistemas de Comunicaciones Digitales y Analógicos*, 5ª Ed.”, Sección 3.3

- Muestreo instantáneo, cuantización y codificación
- Relación señal a ruido en el formateo
- Compresión silábica
- Transmisión de los caracteres PCM por un canal ruidoso
- Relación señal a ruido en transmisión PCM

Introducción

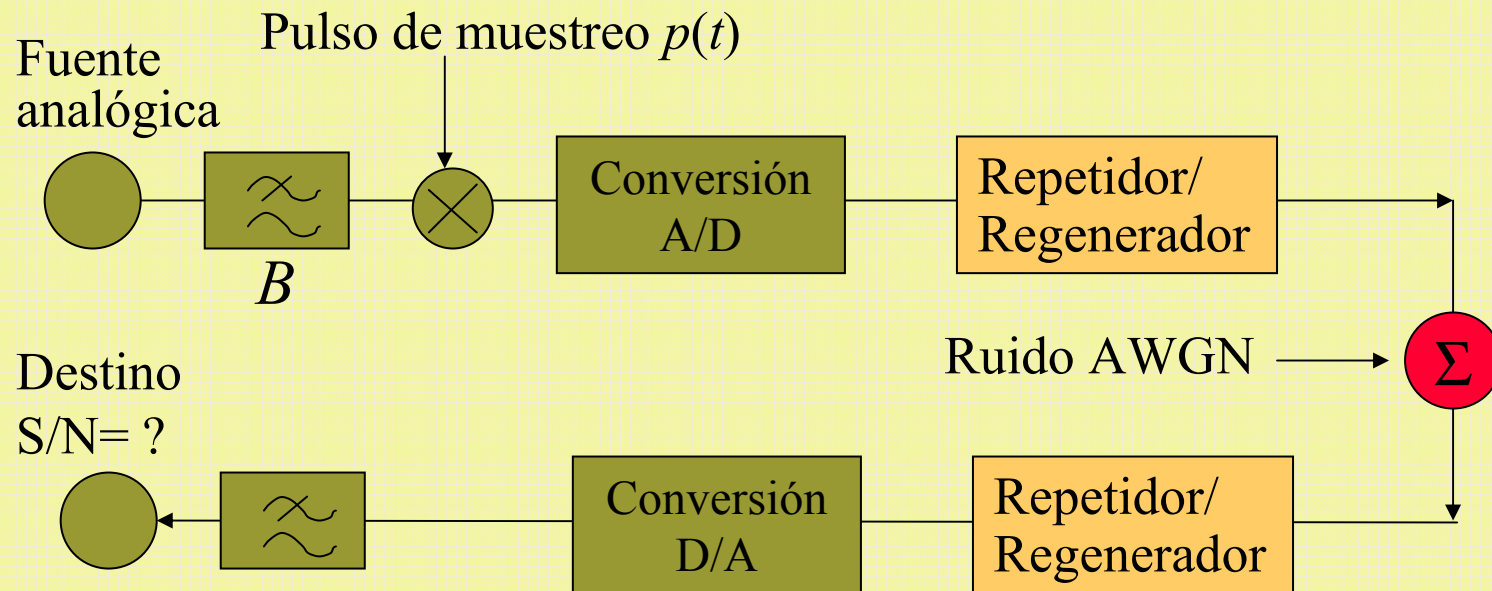
- En este capítulo, las señales y el ruido se describen en términos de señales aleatorias. Se analizarán los siguientes aspectos del formateo PCM
- La señal analógica (de voz) debe ser muestreada y cuantizada
- Parámetros relevantes en este proceso son la distorsión por solapamiento de las componentes espectrales de frecuencia y el ruido de cuantización.
- Para mitigar el efecto de distorsión por solapamiento se muestrea a tasas superiores a las establecidas por el criterio de Nyquist, para relajar las condiciones del filtro pasabajos.
- El número de niveles de cuantización influye sobre el ruido de cuantización.
- En transmisión de señales de voz se logra un considerable aumento en la relación S/N mediante la compresión de las muestras (ley A y μ).
- El canal de transmisión ruidoso afecta la relación señal a ruido en el extremo receptor.

Diagrama de bloques funcional de un sistema de telecomunicaciones digital

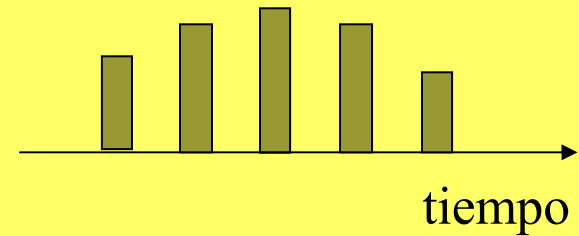


Un sistema PCM con cuantización uniforme

- Un sistema de codificación PCM puede representarse mediante el siguiente diagrama de bloques.
- En este sistema, interesa por el momento poder establecer el efecto del ruido de cuantización, es decir, se analizarán los bloques en color verde.



Muestreo instantáneo



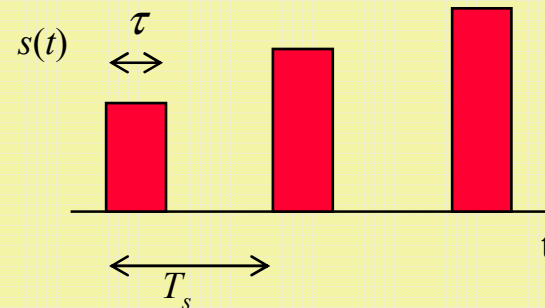
- Sea $x(t)$ la señal analógica limitada a la frecuencia máxima B . El muestreo instantáneo (de cresta plana) consiste en multiplicar la señal $x(t)$ por un tren de impulsos y almacenar la muestra instantánea durante el ciclo de conversión.

$$s(t) = p(t) * x(t) \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) = p(t) * \sum_{-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s)$$

$$p(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

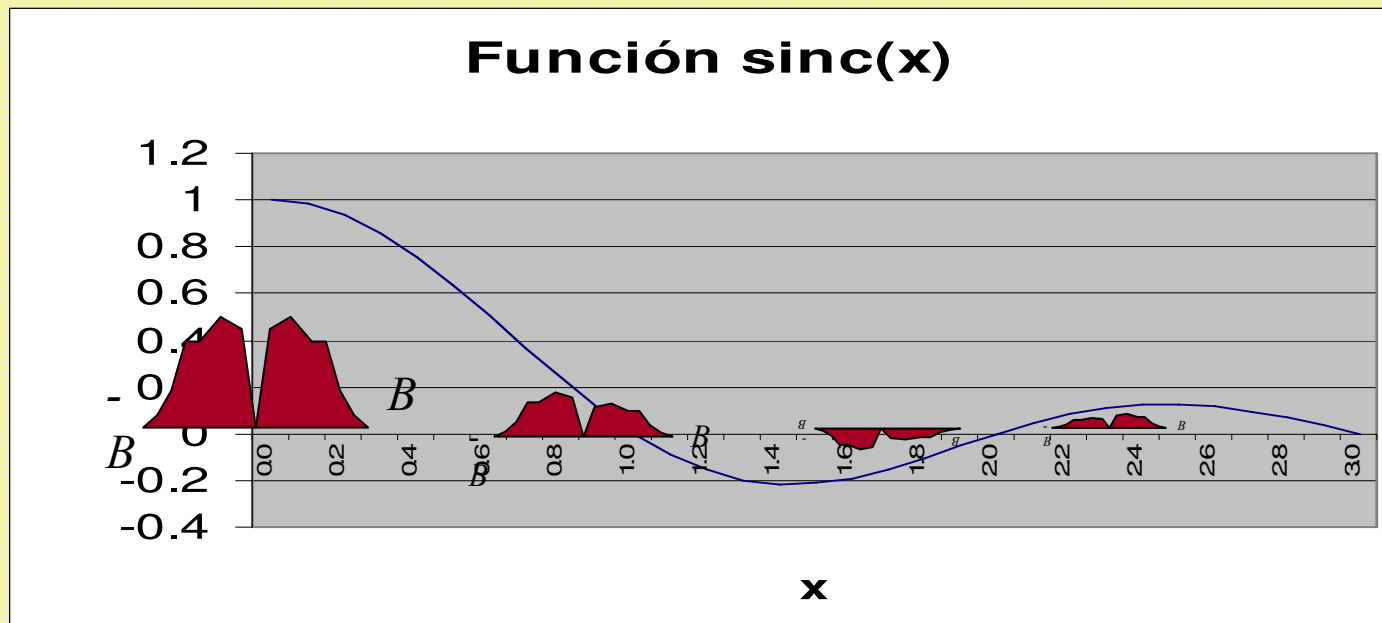
$$s(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) * \sum_{-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s)$$



$$s(t) = A \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) * x(t) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \Leftrightarrow S(f) = \frac{A\tau}{T_s} \cdot \text{sinc}(f\tau) \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} X(f - kf_s)$$

Teorema de Muestreo (Nyquist)

- Para el muestreo instantáneo con pulsos de “techo plano”, se debe filtrar y ecualizar para compensar el término $\text{sinc}(f\tau)$ que depende de f
- No importando cuál sea la técnica de muestreo que se utilice, se produce distorsión si $f_s \leq 2B$. (**Teorema de Nyquist**)
- Para facilitar el filtraje se escoge en aplicaciones reales una tasa de muestreo mayor que el mínimo, típicamente $f_s \geq 1,2 \cdot 2B$

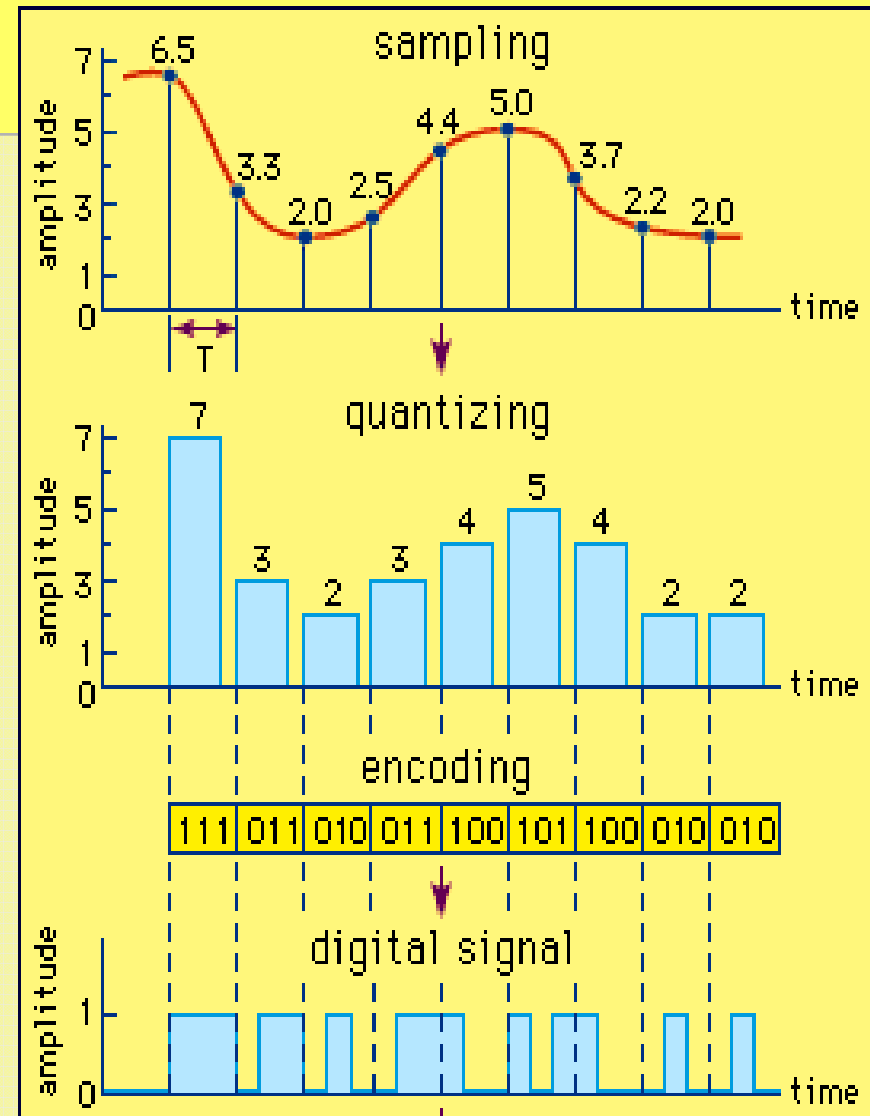


Digitalización de la señal de voz

■ Prácticamente todas las conversaciones telefónicas en Chile se realizan digitalizando las señales de voz.

■ La técnica básica usada en la red fija se denomina PCM (Pulse Code Modulation).

- En el formato básico, o canal “B”, la señal de voz se muestrea a una frecuencia de 8000 muestras por segundo.
- Cada una de las muestras se codifica con 8 bits.
- Luego, un canal B equivale a transmitir a 64 kb/s
- La codificación no es lineal, como se verá luego, debido a las propiedades estadísticas de las amplitudes de las muestras



PCM: muestreo, cuantización y codificación

- El muestreo que se realiza en los codificadores PCM es, invariablemente, el instantáneo.
- Para convertir la muestra analógica en un código digital es necesario aproximar su valor real al más cercano que se pueda obtener mediante la representación binaria del conversor A/D usando la técnica de muestreo instantáneo.
- El error de aproximación se denomina *error de cuantización*.
- En ausencia de ruido de canal o distorsiones que tornen irreconocibles los pulsos (o sea sin errores de recepción), este error de cuantización establecerá la relación S/N en el receptor
- Una de las características importantes del error de cuantización es que permite establecer a priori, por diseño, la relación señal a ruido en el extremo receptor, si el ruido de canal es tal que se cometen muy pocos errores en la recepción de bits. Este aspecto es un resultado importante que se obtiene en esta sección.

PCM: cuantización uniforme

- Para un cuantizador PCM valen las siguientes consideraciones:
 - Se considera que la señal a ser cuantizada no presenta componente continua (ha sido bloqueada) y su módulo alcanza una amplitud máxima equivalente al rango del ecualizador: $A_{\text{máx}}$.
 - Se supone que existen $M = 2^n$ niveles de cuantización, siendo n el número de bits que se emplearán para la transmisión.
 - Para simplificar el análisis se asume **que los intervalos de cuantización son todos iguales (“uniforme”)** y que la señal a transmitir se distribuye uniformemente dentro de cada intervalo de cuantización (lo cual no es igual a suponer distribución uniforme de la señal en el rango completo $\pm A_{\text{máx}}$).
 - La **cuantización uniforme** no es eficiente cuando hay una alta probabilidad de las amplitudes relativamente pequeñas de señal. En tal se modifica el procedimiento de digitalización según se discutirá más adelante.

PCM: error cuadrático medio en un intervalo de cuantización

■ Sea

- x un nivel de amplitud a cuantizar
- x_i el valor aproximado mediante la cuantización
- δ_i el tamaño del intervalo de cuantización asociado a x_i
- $p_i(x)$ la función de densidad de probabilidad de x **condicionada** a que x esté en el rango cuyo valor medio es x_i . Se supone que esta densidad es uniforme ($p_i(x) = 1/\delta_i$) en el rango $[x_i - \delta_i/2, x_i + \delta_i/2]$

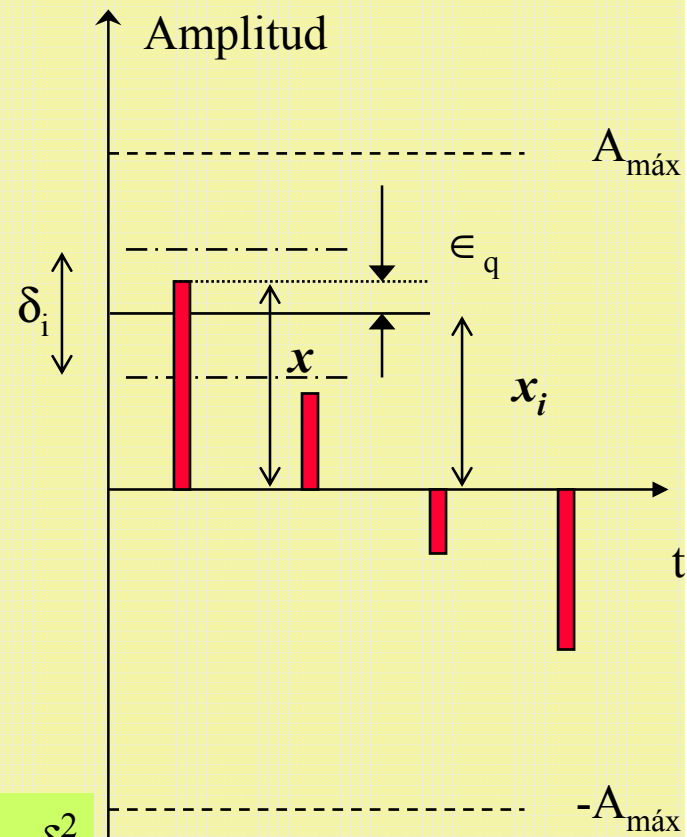
■ Entonces $x_i - \delta_i/2 \leq x \leq x_i + \delta_i/2$

■ La esperanza (condicional) del error será

$$E[(x - x_i) | x_i] = \int_{x_i - \delta_i/2}^{x_i + \delta_i/2} (x - x_i) p_i(x) dx = \frac{1}{\delta_i} \int_{-\delta_i/2}^{\delta_i/2} z dz = 0$$

■ El error cuadrático medio (condicional) de cuantización será

$$E[(x - x_i)^2 | x_i] = \int_{x_i - \delta_i/2}^{x_i + \delta_i/2} (x - x_i)^2 p_i(x) dx = \frac{1}{\delta_i} \int_{-\delta_i/2}^{\delta_i/2} z^2 dz = \frac{\delta_i^2}{12}$$



PCM: error cuadrático medio de cuantización

- Si se define como p_i la probabilidad (incondicional) de que la señal esta en el intervalo en cuestión:
 $x_i - \delta_i/2 \leq x \leq x_i + \delta_i/2$

$$p(i) = \int_{x_i - \delta_i/2}^{x_i + \delta_i/2} p(x) dx \approx p(x_i) \delta_i$$

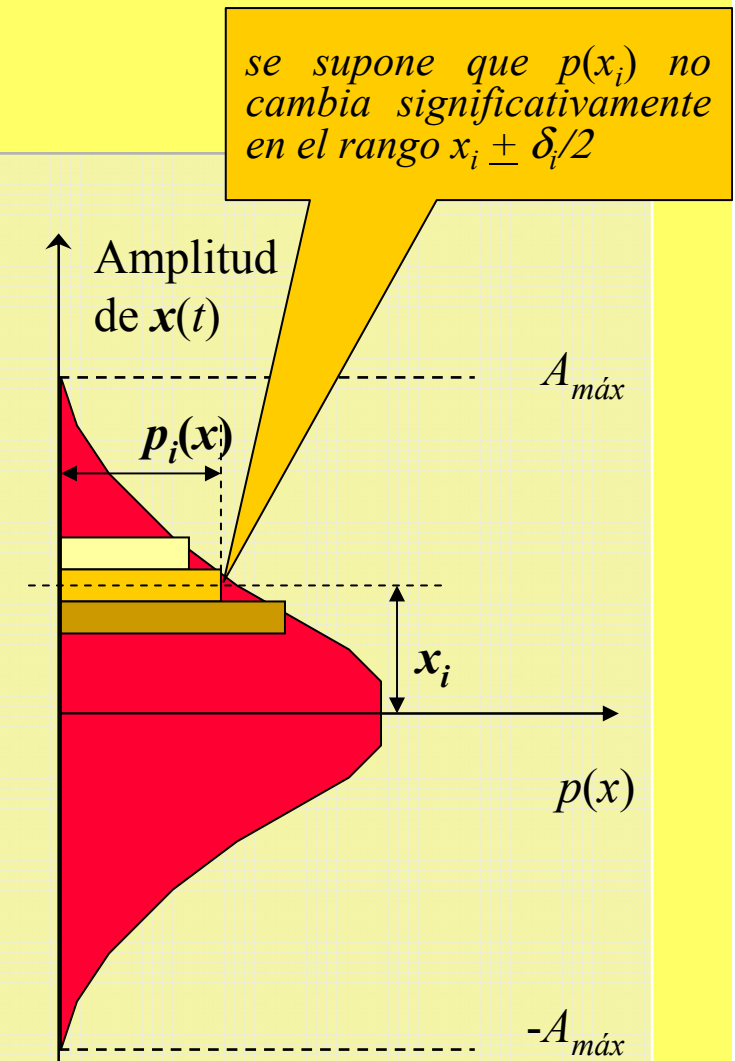
donde $p(x)$ es la fdp incondicional de x

- y descondicionando respecto de x_i

$$E[\varepsilon_q^2] = E\left[E\left[(x - x_i)^2 | x_i\right]\right] = \sum_{\forall i} \frac{p(i) \delta_i^3}{12}$$

y para $\delta_i = \delta$

$$= \sum_{\forall i} p(i) \delta \cdot \frac{\delta^2}{12} = \frac{\delta^2}{12} \quad \text{ya que } \sum_{\forall i} p(i) \delta = 1$$



PCM: potencia de la señal

- Para la señal consideremos primeramente que ésta se distribuye uniformemente en el rango:

$-A_{\text{máx}} \leq x \leq A_{\text{máx}}$ entonces:

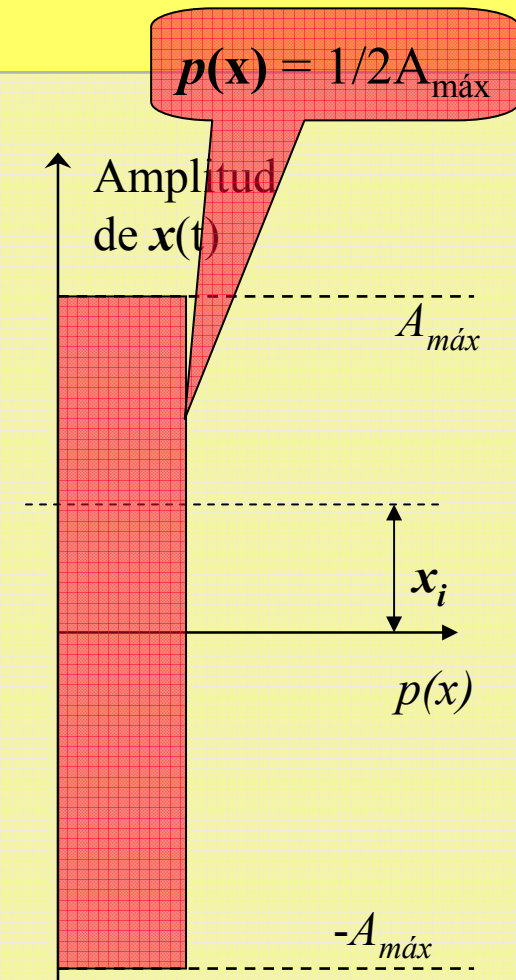
$$E[x] = \int_{-A_{\text{máx}}}^{A_{\text{máx}}} x \cdot p(x) dx = 0$$

- y la potencia normalizada es

$$PS = E[(x - E[x])^2] = \int_{-A_{\text{máx}}}^{A_{\text{máx}}} x^2 p(x) dx = \int_{-A_{\text{máx}}}^{A_{\text{máx}}} \frac{x^2}{2A_{\text{máx}}} dx = \frac{A_{\text{máx}}^2}{3}$$

- En cambio si se usa un tono (sinusoidal) como señal de prueba, $PS = A_{\text{máx}}^2/2$.

- En general se tendrá que $PS \sim A_{\text{máx}}^2$, lo cual puede anotarse como $PS = d \cdot A_{\text{máx}}^2$



PCM: Relación señal a ruido S/N

- La potencia de “ruido” de cuantización es $PN_q = \delta^2/12$
- La potencia de señal es $PS = d \cdot A_{m\acute{a}x}^2$
- Si se usan **n bits para codificar la señal**, es decir con n bits se representa el rango total de señal $\pm A_{m\acute{a}x} = 2A_{m\acute{a}x}$
- Entonces $A_{m\acute{a}x} = 2^{n-1} \delta$
- y por lo tanto $PN_q = A_{m\acute{a}x}^2 / (12 \cdot 2^{2(n-1)}) = A_{m\acute{a}x}^2 / (3 \cdot 2^{2n})$
- Por lo cual:

$$\frac{PS}{PN}\bigg|_q = d \cdot 3 \cdot 2^{2n}$$
$$\frac{PS}{PN}\bigg|_q [dB] = 10 \log_{10}(d \cdot 3) + 6,02n = \alpha + 6,02n$$

PCM: Relación señal a ruido S/N

- Ejemplo:
- para señales de voz la relación señal a ruido para comunicaciones telefónicas debe ser del orden de 36 dB.
- Si la señal de voz se distribuye uniformemente en amplitud (lo cual no es cierto, como se verá a continuación), entonces $d = 1/3$, y el número de bits requerido será

$$\frac{PS}{PN} \Big|_q = 2^{2n}$$
$$\frac{PS}{PN} \Big|_q [dB] = 6,02n \Rightarrow n \geq \frac{36}{6} = 6bits$$

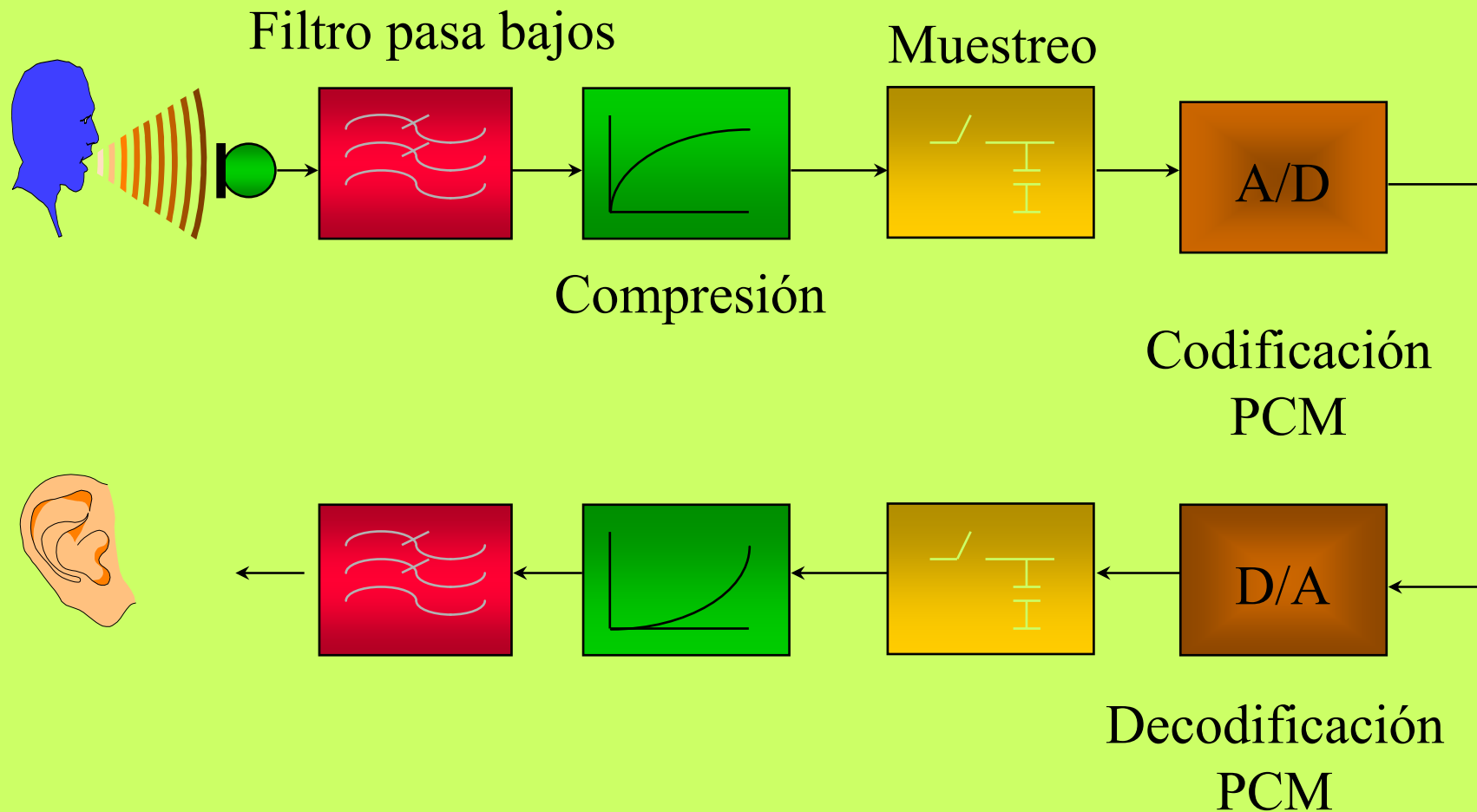
Un ejemplo práctico: grabación de música en CD

- Si se desea establecer un buen rango dinámico para música grabada codificada digitalmente se puede considerar que 90 dB de rango dinámico y una señal de información limitada a 15 kHz por canal podría ser equivalente a una transmisión FM buena.
- Esto requiere de una codificación de 15 bits ($90/6$) y una tasa de muestreo de $1,2 \cdot 30 \text{ kHz} = 36 \text{ kHz}$, o equivalentemente 540 kb/s (36×15).
- Esto permitiría grabar un canal durante $650 \cdot 8 / 0,54 [\text{s}] = 160 [\text{min}]$, sin capacidad de corrección de errores.
- En cambio, la duración de una grabación estereofónica (2 canales) sería de 80 minutos.
- **Pregunta:** si en la práctica se utiliza una frecuencia de muestreo de 44,1 kHz, codificación Reed-Solomon para corregir rayaduras y huellas digitales (2:1) en el CD y se pueden grabar 2 canales (stereo) por unos 75 min.,
 - ¿cuántos bits se requieren para codificar c/u de los dos canales?
 - ¿cuál es la PS/PN resultante en cada canal, expresada en dB?

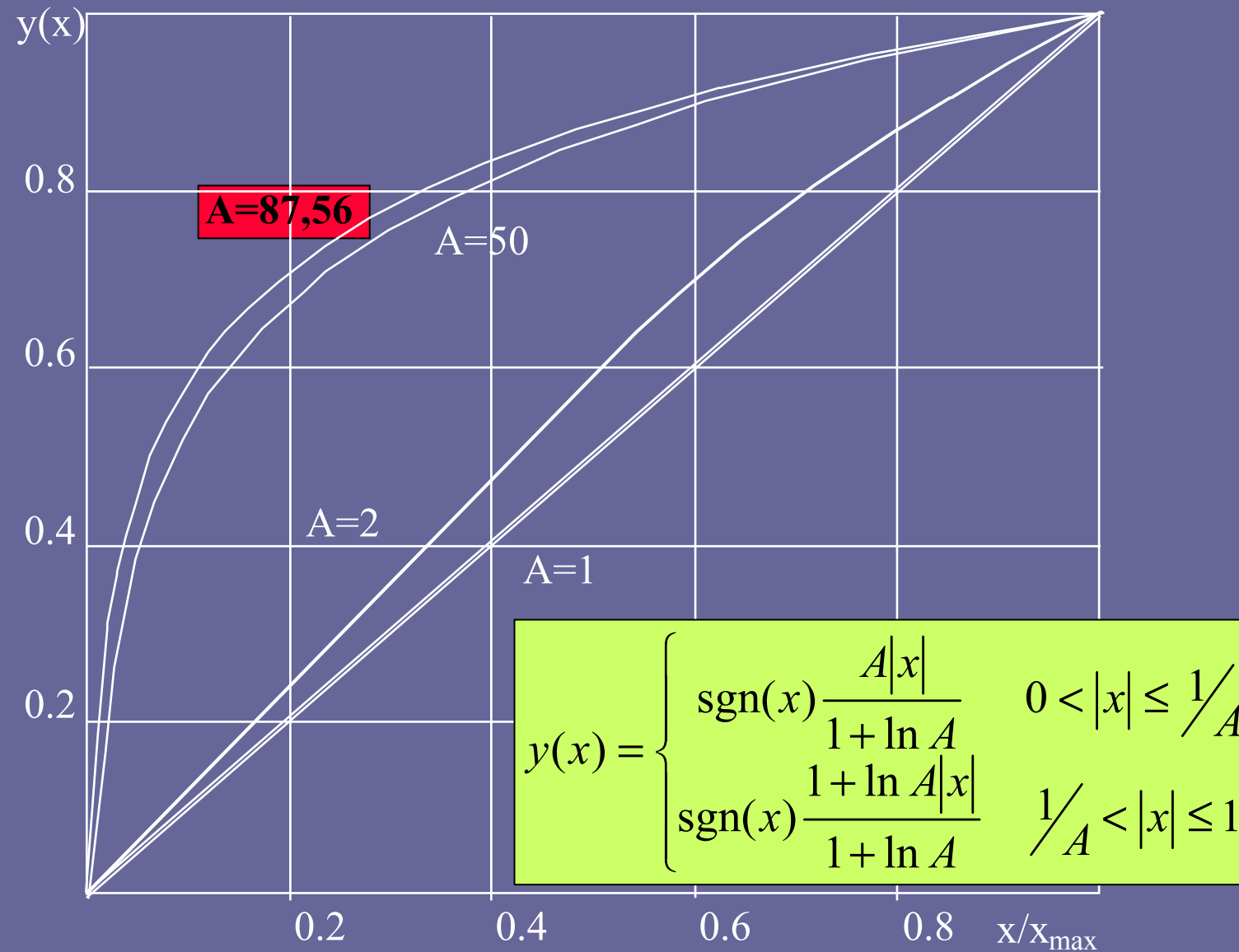
PCM: cuantización no-uniforme

- La cuantización no-uniforme se usa en los codificadores PCM, ya que durante la mayor parte del tiempo los niveles de potencia de la voz son bajos y conviene tener una relación S/N relativamente constante en un amplio rango dinámico de señal.
- Consiste en cuantizar con intervalos más pequeños las señales de menor amplitud instantánea, y con niveles más espaciados las muestras de mayor amplitud instantánea de la señal.
- El efecto de cuantización no uniforme se logra también amplificando más los niveles pequeños de señal, es decir comprimiendo las muestras de mayor amplitud, antes de un conversor A/D uniforme. La distorsión de la señal se evita efectuando el proceso inverso en el extremo receptor (descompresión). Se han desarrollado estándares para determinar el tamaño adecuado de la cuantización:
 - Ley A* Se emplea en Europa y el resto del mundo.
 - Ley μ* Se emplea en EE.UU., Canadá y Japón.
- La compresión es equivalente a elevar la potencia de señal ($d \rightarrow 1$).

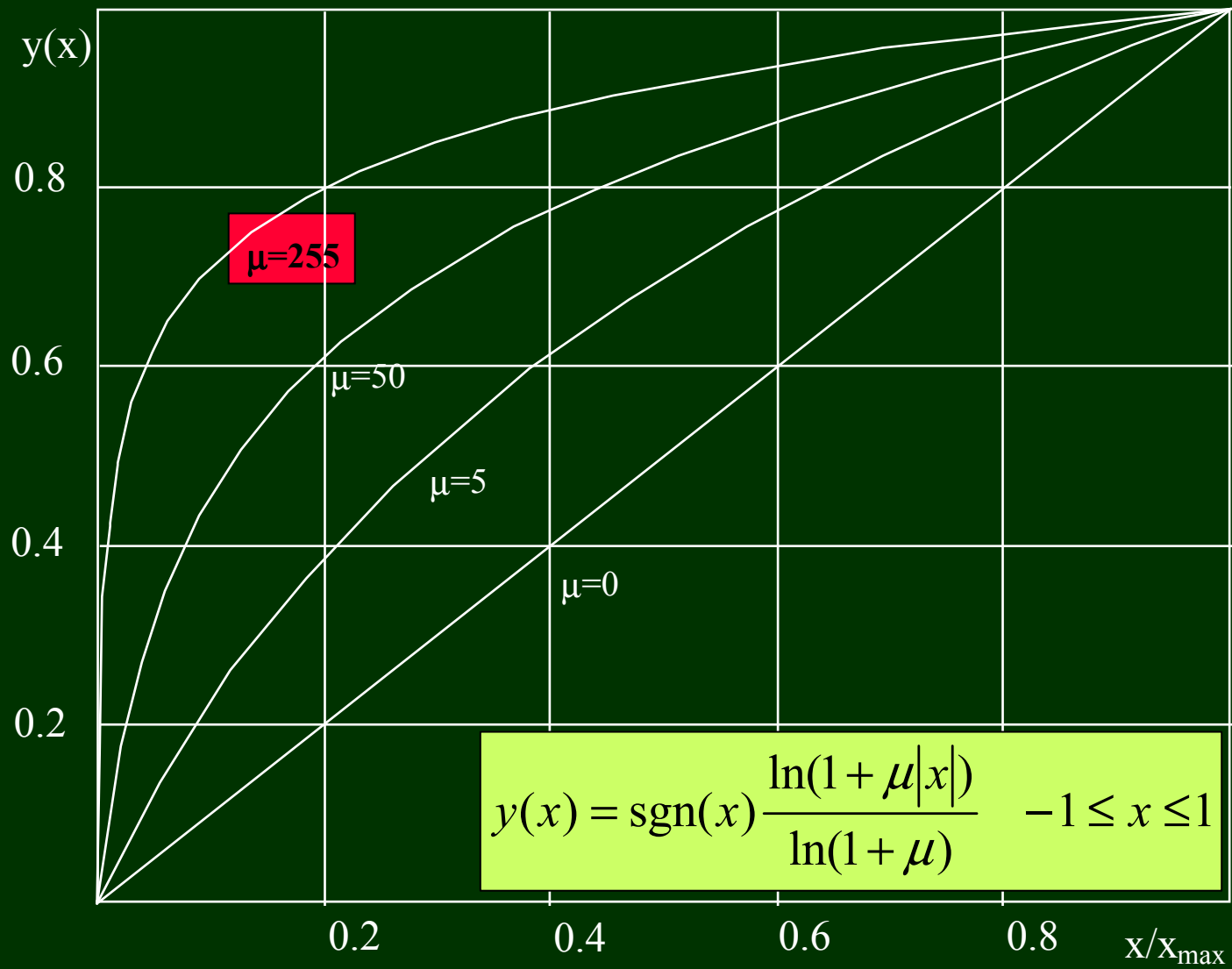
Compresión y Descompresión



Ley A



Ley μ



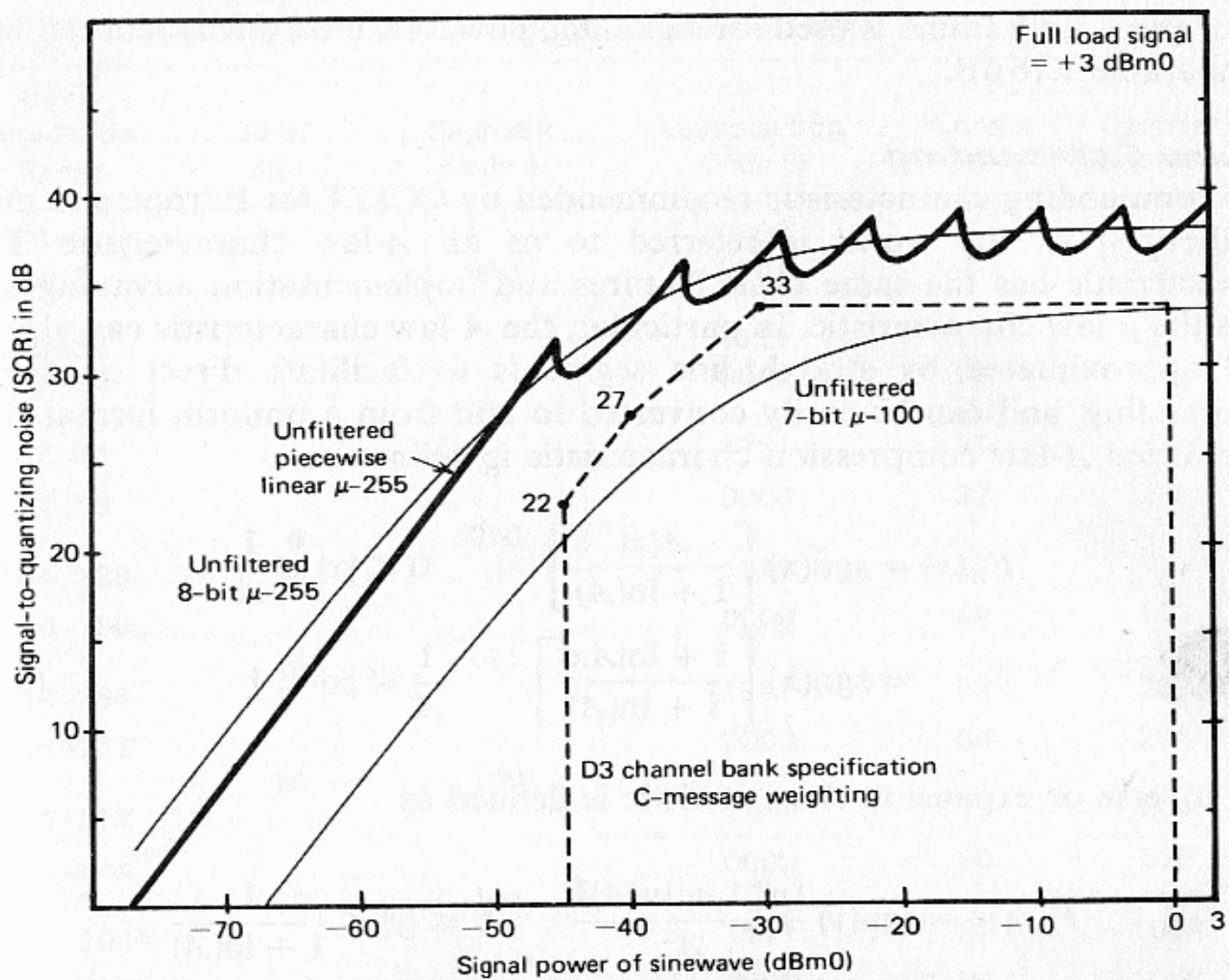


Figure 3.19. Signal-to-quantizing noise of μ -law coding with sine wave inputs.

PCM: efectos de errores de Tx

- Cuando se transmite una información digital, a menudo se introducen errores en la recepción de los símbolos, debido al efecto del ruido o a la deformación de los pulsos digitales en el canal, por efecto de su ancho de banda limitado.
- Evidentemente, el error que se introduce tiene significado diferente según sea la posición del bit errado, dentro del carácter (agrupación de los bits que representan una muestra de voz o de imagen codificada, o una letra de un texto, o el valor obtenido a la salida de un conversor A/D en aplicaciones de telemetría, etc.).
- Por ejemplo, si se transmiten octetos codificados de señales de voz, si se produce un error en el *msb*, esto se traduce en un error de signo. En cambio, si es en el *lsb*, afecta sólo al menor nivel de cuantización.
- A continuación se analizará el efecto del ruido de canal en la recepción de una señal codificada en PCM con cuantización uniforme.
- El análisis se basa en poder expresar el valor medio esperado del error, y su varianza, dado que la varianza es una medida de la potencia del error.

Efecto del error de canal

- Supóngase que se envían n bits codificados.
- Evidentemente, el efecto sobre la señal decodificada será diferente según sea la ubicación del o de los bits recibidos con error.
- Si $2A_{máx}$ es el rango total de la señal recibida, codificada mediante $M = 2^n$ niveles, entonces el error de cuantización ϵ_i cometido por la recepción de un bit errado en la posición i , será de magnitud $A_{máx}/2^{n-i}$.
 - Así si el error se comete en *msb*, $i = n$, $|\epsilon_n| = A_{máx}$
 - Si el error se comete en el *lsb*, $i = 1$, $|\epsilon_1| = A_{máx}/2^{n-1}$
- Ejemplo: $n = 4$, si el error se comete en el bit *lsb*, entonces $|\epsilon_1| = A_{máx}/2^3 = A_{máx}/8 = 2A_{máx}/16 = \text{rango total}/\# \text{ niveles}$

Efecto del error de canal

- Si P_e es la probabilidad de cometer un error en la recepción de un bit y esta probabilidad es independiente de la ubicación del bit, entonces asumiendo “uno” y “cero” equiprobables, el error promedio de la muestra decodificada está dado por:

$$E[\varepsilon] = \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i| P_e P(\text{bit } i = 0) - \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i| P_e P(\text{bit } i = 1) = 0$$

- Esta expresión se basa en que confundir un uno con un cero produce el mismo error que confundir un cero con uno, pero con el signo opuesto.
- El error cuadrático medio que resulta debido al error los bits se obtiene calculando la esperanza de la esperanza condicional. Se considera para ello que la probabilidad de error en cada posición es P_e

$$E \left[E \left[(\varepsilon_i - E[\varepsilon])^2 \middle| \text{error en posición } i \right] \right] = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \cdot P_e = A_{max}^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{2(n-i)}} \cdot P_e$$

si reemplazamos $j = n - i$

$$E[\varepsilon^2] = P_e A_{max}^2 \sum_{j=0}^{n-1} \left(1/2^2\right)^j = \frac{4A_{max}^2 P_e}{3(2^{2n})} (2^{2n} - 1)$$

Efecto del error de canal

- En probabilidades se tiene que si dos variables aleatorias son sumadas, el valor medio de la nueva variable aleatoria es igual a la suma de los valores medios.
- Ahora, si las variables aleatorias son independientes, la varianza de la nueva variable aleatoria también es la suma de las varianzas

$$z = x + y \Rightarrow E[z] = E[x] + E[y]$$

$$x, y \text{ indep.} \Rightarrow E\left[(z - E[z])^2\right] = \sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

- Combinando el error de cuantización (ver pag 13) con el error debido al canal, resulta:

$$E\left[\varepsilon_z^2\right] = \frac{4A_{\text{máx}}^2 P_e}{3\left(2^{2n}\right)} \left(2^{2n} - 1\right) + \frac{A_{\text{máx}}^2}{3\left(2^{2n}\right)}$$

$$E\left[\varepsilon_z^2\right] = \frac{A_{\text{máx}}^2}{3\left(2^{2n}\right)} \left(4P_e \left(2^{2n} - 1\right) + 1\right)$$

Relación S/N para PCM

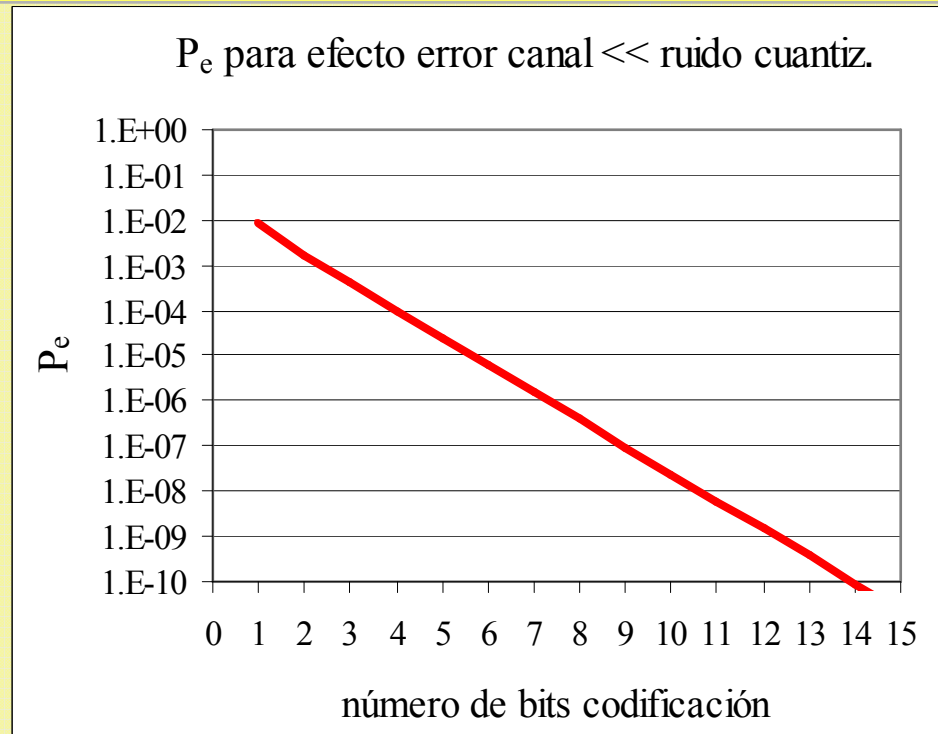
(considerando el ruido de cuantización y de canal)

- Si se considera que la potencia de señal de un proceso de transmisión de una señal analógica, muestreada y codificada en PCM es $PS = d \cdot A_{max}^2$, entonces la relación S/N es

$$\left. \frac{PS}{PN} \right|_{PCM} = \frac{d \cdot A_{max}^2}{\left(\frac{A_{max}^2}{3 \cdot 2^{2n}} \right) \left(1 + 4P_e (2^{2n} - 1) \right)}$$
$$\left. \frac{PS}{PN} \right|_{PCM} = \frac{3 \left(2^{2n} \right) \cdot d}{1 + 4P_e (2^{2n} - 1)}$$

Importancia relativa de errores.

- En la relación obtenida es posible establecer 2 cotas interesantes relacionadas con la cuantificación de los errores derivados de la cuantización y del ruido en el canal.
- Se puede también evaluar por ejemplo la P_e tolerable si condiciona a que la potencia de ruido asociada a la cuantización es preponderante (y viceversa). Por ejemplo la figura muestra la P_e para el caso en que la potencia del ruido debido al error de canal es 1/10 de la de cuantización



$$E \left[\varepsilon_z^2 \right] = \frac{A_{m \acute{a}x}^2}{3 \left(2^{2n} \right)} \left\{ 1 + 4 P_e \left(2^{2n} - 1 \right) \right\}$$

Resumen

- El muestreo de señales analógicas requiere que la frecuencia de muestreo tiene que ser al menos el doble de la frecuencia de corte del filtro pasabajos de entrada.
- La mayoría de los conversores A/D utilizan el muestreo instantáneo. La duración del ciclo de conversión influye en la distorsión que puede experimentar la señal.
- El error de cuantización es una fuente de “ruido” importante, pero manejable por diseño en enlaces digitales. Auditivamente el “ruido” de cuantización se percibe más como distorsión.
- El ruido de canal (P_{eb}) es otra fuente de imprecisión en la recepción de señales codificadas digitalmente.
- Hay situaciones en que el efecto predominante en el deterioro de la relación S/N es el ruido de canal, o bien, el ruido de cuantización. El experto en telecomunicaciones debe poder distinguir los 2 efectos y determinar si un sistema está operando adecuadamente.
- En la práctica, además del beneficio de la compresión/descompresión en la SNR ($d \rightarrow 1$), el filtrado pasabajo de recepción, después de la conversión D/A, también reduce la potencia de ruido aleatorio debido a la P_e de recepción (pulso de amplitud aleatoria según el peso del bit errado). Las expresiones mostradas son una cota superior para el efecto de la P_{eb} .
- PCM es ineficiente por las altas tasas de transmisión resultantes (ejemplo: $f_m=4\text{kHz}$, 8bits $\Rightarrow 64\text{kb/s}$), se recurre en la práctica a técnicas especiales aplicables principalmente a señales de voz para reducir las tasas, y aumentar la capacidad a nivel de sistema.
- Ref.: L. Couch: *Sistemas de Comunicación Digitales y Analógicos*, 5ª Ed. Sección 3.3.