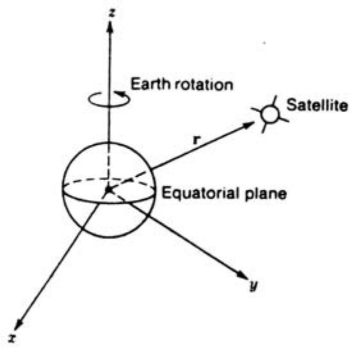
ECUACIONES DE LA ORBITA

LAS ECUACIONES DE LA ORBITA

Leyes de Kepler

- Las órbitas son planas y el satélite describe una elipse con un foco en el centro de masa de la Tierra.
- El radio vector describe áreas iguales en tiempos iguales.
- Los cuadrados de los periodos orbitales de dos satélites tienen la misma relación que los cubos de sus distancias medias al centro de la tierra.

En un sistema de coordenadas rectangulares



El origen es el centro de la tierra y el eje z se extiende a través del polo norte.
Las direcciones del eje *x* e *y* son arbitrarias y la tierra rota en el eje *z*.
Se asume que el centro de masa del sistema tierra - satélite coincide con el centro de masa de la tierra que es el origen.
El vector *r* va desde el centro de la tierra al satélite en movimiento.

La fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{g}}$ para un satélite de masa *m* localizado a un vector de distancia *r* del centro de la tierra esta dado por:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{g}} = \mathrm{G}\frac{\mathrm{M}m}{r^2}(-\hat{\mathbf{r}})$$

M= Masa de la tierra
G= Constante Universal de Gravedad=6,672X10^{-11} Nm/kg^2
GM= μ = 3,9861352X10^5 km^3/s^2, Constante de Kepler

La segunda ley de Newton (Fuerza de Inercia) es:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{c}} = m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{dt}^2}\hat{\mathbf{r}}$$

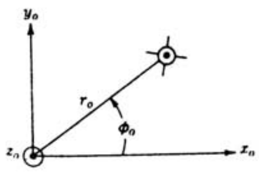
Igualando la fuerza de inercia en el satélite con la fuerza gravitacional, tenemos:

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{dt}^2}\hat{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = 0$$

En términos de las coordenadas x e y:

$$\hat{\mathbf{x}}_0\left(\frac{\mathrm{d}^2 x_0}{\mathrm{dt}^2}\right) + \hat{\mathbf{y}}_0\left(\frac{\mathrm{d}^2 y_0}{\mathrm{dt}^2}\right) + \frac{\mu\,(x_0\hat{\mathbf{x}}_0 + y_0\hat{\mathbf{y}}_0)}{(x_0^2 + y_0^2)} = 0$$

En un sistema de coordenadas polares (r_0, ϕ_0). De acuerdo a la siguiente figura y utilizando las siguientes transformaciones:



$$x_0 = r_0 \cos\phi_0$$
$$y_0 = r_0 \sin\phi_0$$
$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{r}}_0 \cos\phi_0 - \hat{\boldsymbol{\phi}}_0 \sin\phi_0$$
$$\hat{\mathbf{y}}_0 = \hat{\boldsymbol{\phi}}_0 \cos\phi_0 + \hat{\mathbf{r}}_0 \sin\phi_0$$

Luego la ecuación de $\hat{\mathbf{r}}_0$ será:

$$\frac{\mathrm{d}^2 r_0}{\mathrm{dt}^2} - r_0\left(\frac{\mathrm{d}\phi_0}{\mathrm{dt}}\right) = -\frac{\mu}{r_0}$$

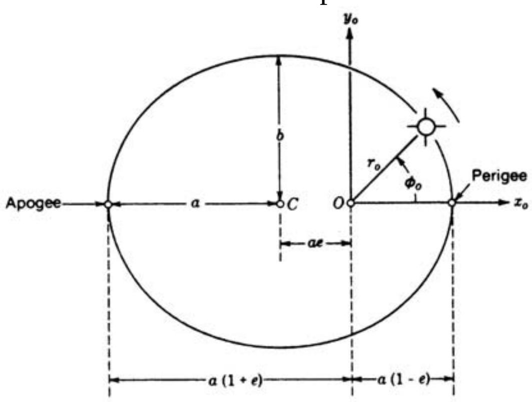
A partir de esto, la ecuación de la órbita es:

$$r_0 = \frac{p}{1 + e\ \cos(\phi_0 - \theta_0)}$$

e = excentricidad
si $e < 0$ es la ecuación de una elipse
si $e = 0$ la órbita es un círculo con centro en el centro de la tierra
θ_0 = Orientación de la elipse con respecto al plano orbital (ejes x_0 e y_0)
p esta dado por $\frac{h^2}{\mu}$, donde h = magnitud angular del vector momentum

Para $\theta_0 = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{p}{1 + e\ \cos\phi_0}$

La distancia de la tierra al plano orbital se muestra a continuación:



0 = Centro de la tierra
C = Centro de la elipse
e = excentricidad
a = Eje semimayor de la elipse orbital
b = Eje semimenor de la elipse orbital

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$
$$b = a\left(1 - e^2\right)^{1/2}$$

Perigeo: punto de la órbita en que el satélite está más cerca de la tierra
Apogeo: punto de la órbita en que el satélite está más lejos de la tierra
Apogeo y perigeo se miden a lo largo del eje x_0

Mediante la ecuación del área de la elipse (πab) podemos calcular el periodo orbital T como:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

La velocidad del satélite v será:

$$v = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}\right)}$$

LOCALIZACIÓN DEL SATÉLITE EN LA ÓRBITA

Otra forma de escribir la ecuación de la órbita es:

$$r_0 = \frac{a(1-e^2)}{1+e\ \cos\phi_0}$$

ϕ_0: ángulo "verdadero anormal". referido al eje x, desde el perigeo a la posición instantánea del satélite.

o

$$\phi_0 = \cos^{-1}\left[\frac{1}{e}\left(1 - \frac{a(1-e^2)}{r_0}\right)\right]$$

Luego, tenemos las coordenadas rectangulares del satélite como:

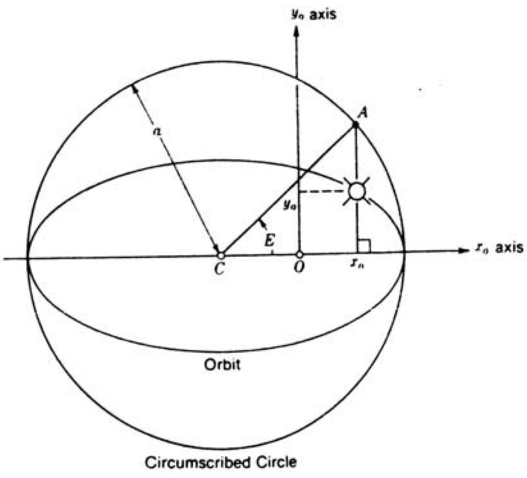
$$x_0 = r_0\cos\phi_0$$

$$y_0 = r_0\sin\phi_0$$

La velocidad angular media es:

$$\eta = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

Si se circunscribe la órbita a un círculo de radio a:



Se ubica un punto donde una línea vertical intersecta al satélite y al circulo circunscrito en el punto A.

La línea desde el centro de la elipse al punto A define un ángulo E con respecto al eje x_0.

E es llamada la anomalía excéntrica del satélite y se relaciona con el radio mediante:

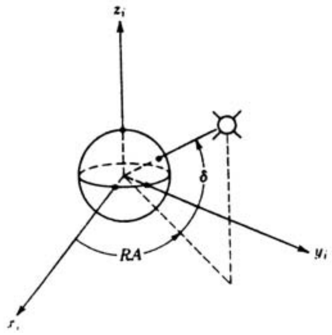
$$r_0 = a(1-e\ \cos E)$$

Conocido t y el tiempo de paso por el perigeo t_p podemos calcular la anomalía media M o la anomalía excéntrica E:

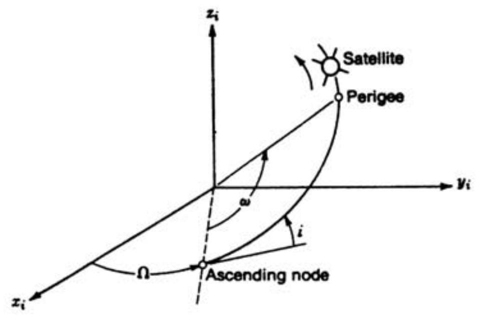
$M=\eta(t-t_p)=E-e\ \sin E$, M es la longitud del arco (en radianes)

LOCALIZANDO EL SATÉLITE CON RESPECTO A LA TIERRA (SISTEMA DE COORDENADAS INERCIALES)

Se requieren transformaciones que permitan que el satélite sea localizado en un punto de la superficie rotatoria de la tierra.
Se define un sistema de coordenadas rectangulares fijo (x_i,y_i,z_i) llamado *sistema de coordenadas ecuatorial geocéntrico* cuyo origen es el centro de la tierra.



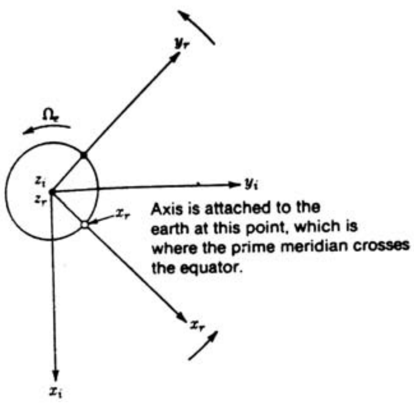
El eje z_i coincide con el centro de rotación de la tierra y se extiende a través del polo norte.
El eje x_i apunta hacia un lugar fijo en el espacio llamado *primer punto de Aries*. Esta es la dirección de una línea desde el centro de la tierra a través del centro del sol en el equinoccio vernal o de primavera (alrededor del 21 de Marzo).
El plano (x_i,y_i) pasa a través del ecuador de la tierra y se denomina plano ecuatorial.
La distancia angular que se mide hacia el este en el plano ecuatorial del eje x_i se denomina *right ascension* (ascensión recta) y se le asigna el símbolo *RA*.
Los dos puntos en los cuales la órbita penetra el plano ecuatorial se llaman nodos.
El satélite se mueve hacia arriba a través del plano ecuatorial en el *nodo ascendente* y hacia abajo en el *nodo descendente*.



La ascensión recta del nodo ascendente se denomina Ω.
El ángulo que el plano orbital forma con el plano ecuatorial (los planos se intersectan en las líneas que unen los nodos) se denomina inclinación *i*.
El ángulo *w* o argumento del perigeo es el ángulo medido a lo largo de la órbita desde el nodo ascendente al perigeo.
Las coordenadas del satélite en el plano orbital (x_0,y_0,z_0) se relacionan con las coordenadas del satélite (x_i,y_i,z_i) por una transformación lineal (Transformación CO-CI) que se muestra:

$$
\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega)\cos(\omega) - \sin(\Omega)\cos(i)\sin(\omega) & -\cos(\Omega)\sin(\omega) - \sin(\Omega)\cos(i)\cos(\omega) & \sin(\Omega)\sin(i) \\ \sin(\Omega)\cos(\omega) + \cos(\Omega)\cos(i)\sin(\omega) & -\sin(\Omega)\sin(\omega) + \sin(\Omega)\cos(i)\cos(\omega) & -\cos(\Omega)\sin(i) \\ \sin(i)\sin(\omega) & \sin(i)\cos(\omega) & \cos(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{bmatrix}
$$

Se necesita una transformación de coordenadas más específica para ubicar el satélite con respecto a un punto de la tierra rotando.

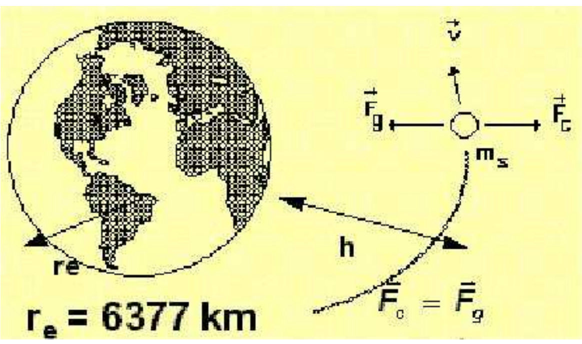


Se define un sistema rectangular rotatorio referido a la tierra cuyo eje z y el plano x-y corresponde a aquellos del sistema ecuatorial geocéntrico.
El eje x_r pasa a través del punto donde el principal meridiano geográfico cruza el ecuador.
El sistema rotatorio gira a una velocidad angular Ω_e y T_e mide el tiempo transcurrido desde que el eje x_r coincide con el eje x_i .

Las coordenadas del satélite en el sistema rotatorio se relacionan con las coordenadas del sistema ecuatorial geocéntrico por:

$$
\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega_e T_e) & \sin(\Omega_e T_e) & 0 \\ -\sin(\Omega_e T_e) & \cos(\Omega_e T_e) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}
$$

LAS ECUACIONES DE LA ORBITA GEOESTACIONARIA



$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{g}} = G\frac{Mm}{(r_e + h)^2}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{c}} = m\bar{a} = \frac{mv^2}{r_e + h}$$

M: masa de la tierra=5,98X10^{24}Kg
m: masa del satélite
G: constante Universal de Gravedad=6,672X10^{-11} Nm/kg^2
GM= μ = 3,9861352X10^5 km^3/s^2, Constante de Kepler
r_e: radio de la tierra
h: distancia de la superficie de la tierra al satélite

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{g}} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{c}} \Rightarrow \mathrm{G}\frac{\mathrm{M}m}{(r_e + h)^2} = \frac{mv^2}{r_e + h}$$

$$v = \sqrt{\frac{\mathrm{GM}}{r_e + h}}$$

$$T = \frac{2\pi(r_e + h)}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{(r_e + h)^3}{\mathrm{GM}}} = 23^{\mathrm{h}}56^{\mathrm{m}}4^{\mathrm{s}} = 86164\mathrm{seg}$$

$$r_e + h = 42.157\mathrm{Km}$$

$$h = 35.779\mathrm{Km}$$

$$v = 3{,}075\,{}^{\mathrm{Km}}\!/\!_{\mathrm{seg}}$$