

# Técnicas Modernas en Automática

## Parte III: “Robótica”

Juan Hernández Sánchez

# Índice general

<b>1. Generalidades sobre Robots Industriales</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Tipos de robots industriales . . . . .	3
1.3. Grados de libertad en un manipulador . . . . .	4
1.4. Organización global del robot . . . . .	6
1.5. Otros conceptos en robótica . . . . .	7
<b>2. Coordenadas espaciales y transformaciones</b>	<b>9</b>
2.1. Introducción . . . . .	9
2.2. Coordenadas homogéneas . . . . .	9
2.3. Transformaciones de coordenadas en el espacio de trabajo . . . . .	11
2.4. Transformaciones de coordenadas rotulares . . . . .	13
<b>3. Transformaciones de coordenadas con ángulos de Euler</b>	<b>16</b>
3.1. Introducción . . . . .	16
3.2. Rotaciones sucesivas . . . . .	16
3.3. Cálculo de los ángulos de Euler . . . . .	18
3.4. Ejemplo de giro de mano robótica . . . . .	18
<b>4. Formulación de tareas de manipulación</b>	<b>19</b>
4.1. Introducción . . . . .	19
4.2. Tarea de ensamble . . . . .	19
<b>5. Modelado de manipuladores</b>	<b>22</b>
5.1. Introducción . . . . .	22
5.2. Estados de la mano del robot . . . . .	22
5.3. Ejemplo del cálculo de la matriz $T$ . . . . .	24
5.4. Programación y computación . . . . .	25
<b>6. Modelado con matrices inversas</b>	<b>26</b>
6.1. Introducción . . . . .	26
6.2. Método con matrices inversas . . . . .	26

6.3. Un ejemplo simple . . . . .	27
<b>7. Servocontrol rotular</b>	<b>29</b>
7.1. Introducción . . . . .	29
7.2. Lazos de control rotular . . . . .	30
<b>8. Dinámica de robots</b>	<b>32</b>
8.1. Introducción . . . . .	32
8.2. Ecuaciones de velocidad y aceleración . . . . .	32
8.3. Ecuaciones progresivas de fuerzas y momentos . . . . .	33
8.4. Ecuaciones retrogresivas de fuerzas y momentos . . . . .	34
<b>9. Control de posición y de fuerza de robots</b>	<b>35</b>
9.1. Introducción . . . . .	35
9.2. Especificación de trayectorias . . . . .	35
9.3. Descripción de caminos con un lenguaje robótico . . . . .	36
9.4. Control de posición . . . . .	36
9.5. Control de fuerza . . . . .	38

# Capítulo 1

## Generalidades sobre Robots Industriales

### 1.1. Introducción

El robot, según la definición de Robotics Institute of America, “es un manipulador multifuncional reprogramable diseñado para mover material, piezas o partes, herramientas o dispositivos especializados mediante movimientos programados variables para la realización de una variedad de tareas”.

De acuerdo con esta definición el robot industrial está compuesto por un manipulador mecánico y una unidad para su control, como se ilustra en la figura 1.1.

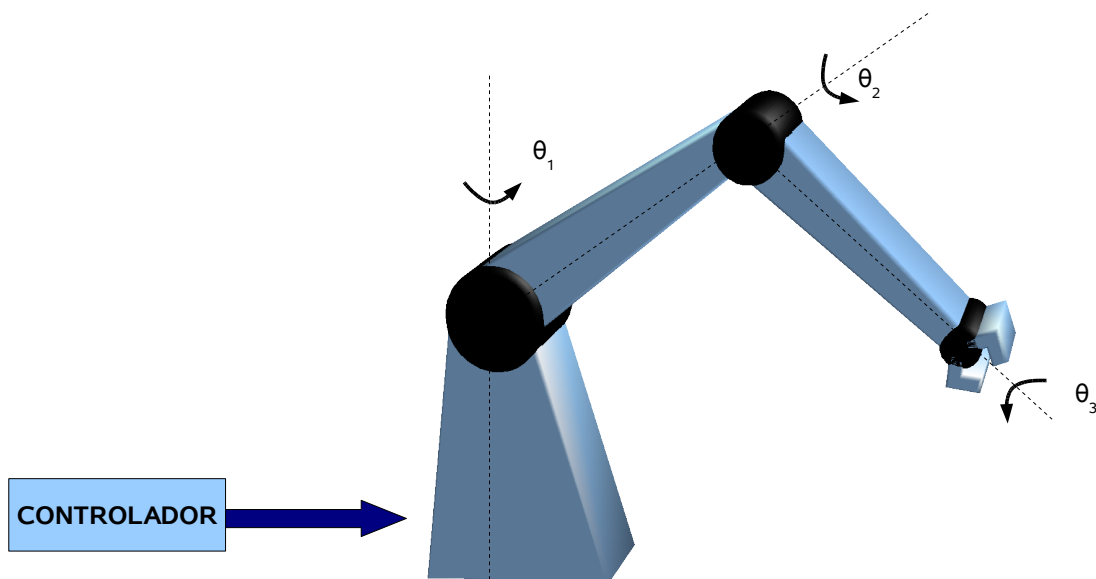


Figura 1.1: Robot Industrial.

El manipulador es, considerado mecánicamente, como una cadena cinemática abierta construida por segmentos articulados que pueden girar en torno, o deslizarse respecto, a ejes o direcciones llamadas rótulas, en general, como se ilustra en la figura 1.1.

En la figura 1.1 se ha dibujado un manipulador con un torso, que puede girar con respecto a la vertical en un ángulo  $\theta_1$  un brazo superior que puede girar un ángulo  $\theta_2$  respecto a un eje, que pase por el “hombro” y finalmente un brazo inferior (antebrazo) que puede girar en un ángulo  $\theta_3$  respecto a un eje que pase por el “codo”. Los movimientos rotatorios indicados son llamados “grados de libertad” de posición pues bastan para posicionar la “mano” en cualquier punto del espacio alcanzable o de trabajo del manipulador.

En este trabajo se considerará sinonimos los términos unión, rótula, articulación, junta o grado de libertad (“joint”) y asimismo los vocablos segmento, enlace o eslabón (“link”).

En vez de rótulas giratorias los manipuladores pueden tener una o más uniones deslizantes o prismáticas. Un manipulador con tres grados de libertad de posicionamiento es llamado no redundante y será el único tipo considerado en este curso. Hay también manipuladores redundantes y son aquellos que tienen más de tres grados de libertad de posicionamiento, lo que es necesario o útil cuando el espacio de trabajo del manipulador contiene obstaculos al mismo movimiento de éste.

El brazo del manipulador termina en una mano, garra o efector final (“end-effector”), destinada a asir y mmover una herramienta o material (por ejemplo un soldador o una tuerca) En general la muñeca (de la mano) debe tener tres grados de libertad o de gira respecto a un sistema de coordenadas  $x, y, z$  ubicados en ella. Las rotaciones en torno a los ejes  $x, y, z$  son llamados giro o rodadura (“roll”), cabeceo (“pitch”) y guiñada (“yaw”). En la muñeca humana el giro está entre los límites de  $-180^\circ$  y  $90^\circ$ , el cabeceo entre  $-90^\circ$  y  $50^\circ$  y la guiñada entre  $-45^\circ$  y  $15^\circ$  (todos aproximadamente).

En tanto que la mano humana tiene cinco dedos, los manipuladores rara vez tienen más de tres dedos. Los dedos tienen a su vez grados de libertad apropiados para las operaciones a realizar por el robot.

Usualmente, los segmentos de los manipuladores son rígidos, pero hay también avances en diseños con segmentos flexibles. En general, los robots cuentan con un solo brazo, pero hay tipos de ellos con dos brazos. En estos, así como cuando hay dos o más manipuladores simples en un espacio común de trabajo, se presenta el problema de la

coordinación de tareas, operaciones y movimientos sin colisiones o trabazones.

Las articulaciones de los manipuladores son movidas por motores (que, generalmente, son eléctricos) montados en ellas apropiadamente y comandados, por operario o programa, desde el sistema de control, vía servomecanismos con realimentación de posición y de velocidad. En el caso más simple los dedos de la garra son cerrados o abiertos sin realimentación de posición o de fuerza. Sin embargo, en tipos avanzados de robots hay sensado de tacto, posición o fuerza. También hay gran progreso en robots con visión artificial.

La gran mayoría de los robots son diseñados para operación fija, aunque hay creciente desarrollo en robots ambulatorios.

Asimismo, aunque la mayoría de los manipuladores son de índole antropomorfa, en que tienden a asemejarse al brazo humano, hay muchas otras formas de estructura, motivadas por razones técnicas y económicas.

Cabe agregar que la Japan Industrial Robot Association define varios tipos de robots, tales como: manipulador; robot secuenciador; robot replicador; robot inteligente; robot repetidor. Algunos de estos tipos no serían considerados robots de acuerdo a la definición dada al comienzo de este capítulo.

Además de los robots y manipuladores robóticos, tienen gran utilidad y aplicaciones los telemanipuladores y los teleoperadores; en particular hay gran esfuerzo en su desarrollo para uso en el ámbito submarino y en ambientes contaminados o tóxicos.

## 1.2. Tipos de robots industriales

Los primeros robots industriales fueron introducidos en los años 1960 en líneas de armado de automóviles; tales como los denominados con siglas PUMA (Unimation), T<sup>3</sup> (Cincinnati Milacron) y TRb-6 (Asea).

Los robots pueden ser clasificados desde varios puntos de vista, tales como los de: comportamiento; estructura; trayectorias. El primer punto de vista es aplicable luego de haber estudiado temas de cinemática, cinética y otros conceptos. Se considera aquí sólo los dos primeros puntos de vista.

### A. Clasificación en base a estructura y movimiento.

Para esta clasificación se considera los tres grados de libertad (*dof*) de posición, para ubicar la mano en un punto del espacio de trabajo (conjunto de puntos alcanzables). La mano tiene además sus tres *dof* citados antes (giro, cabeceo y guiñada).

Las formas básicas de robots son de los tipos descritos a continuación.

- a) Tipo revoluto. Remeda el brazo humano y tiene rotaciones de torso, hombro y codo.
- b) Tipo polar (esférico). Tiene rotación de cintura en la base, giro en torno a la vertical y extensión prismática (del brazo).
- c) Tipo cilíndrico. Posee giro de torso, alargamiento prismático vertical y extensión prismática horizontal del brazo.
- d) Tipo cartesiano (rectangular), deslizante. Tiene movimientos prismáticos perpendiculares entre sí.
- e) Tipo cartesiano (rectangular), grúa. Posee movimientos perpendiculares entre sí pero tiene una grúa para los deslizamientos.
- f) Tipo SCARA. Tiene rotaciones respecto a ejes verticales en hombro y codo y levantamiento en el extremo.

### B. Clasificación en base a trayectorias.

Hay control de trayectorias punto a punto y continuas.

- a) Control punto a punto. Se programa el robot de modo que se detenga en cada punto y en éste planea su próximo movimiento en forma predeterminada. Entre puntos no es controlado pero se mueve de acuerdo con la estructura del manipulador. Ofrece gran exactitud y repetibilidad.
- b) Control del robot de modo que siga una trayectoria arbitraria de forma exacta. El movimiento es más suave a lo camino pero hay problemas de cómputo de velocidad en tiempo real, por lo que tiene menor rendimiento que el de control paso a paso.

## 1.3. Grados de libertad en un manipulador

Se indicó antes que el manipulador robótico (RM) es importante tanto en sí mismo como parte de un robot industrial (IR) y que puede ser considerado como una cadena cinemática, formada por segmentos articulados, abierta terminada en la mano. Un RM revoluto de seis grados de libertad es mostrado esquemáticamente en la figura 1.2.

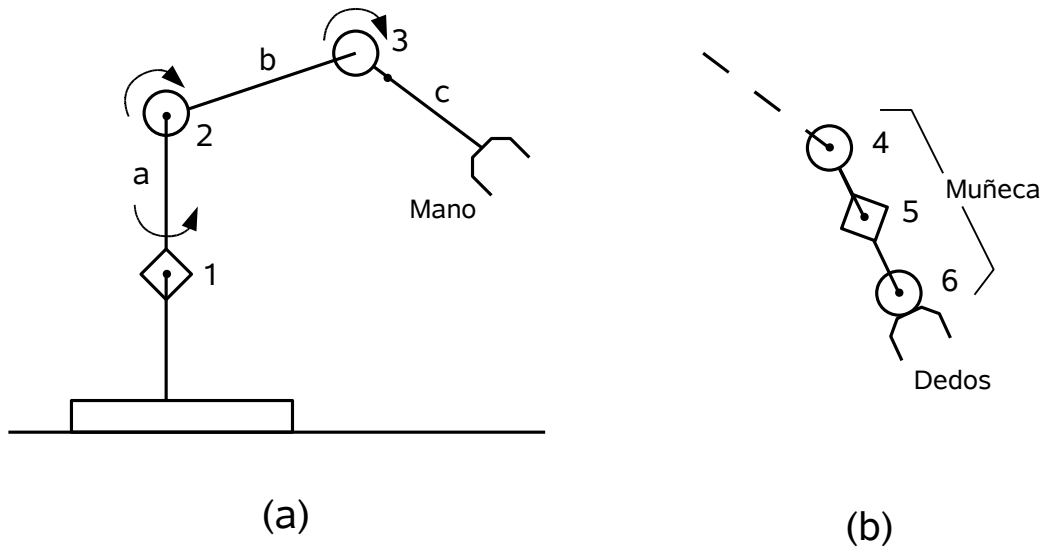


Figura 1.2: Grados de libertad (*dof*) 1 a 6. (a) *Dof* de posición. (b) *Dof* de orientación

En la figura 1.2, los segmentos son *a*, *b* y *c* y las rótulas son 1, 2 y 3 para posicionamiento y 4, 5 y 6 para orientación de la mano. La rotación de un segmento respecto a su eje es indicada por un rombo, en tanto que la rotación de un segmento respecto a su vecino es representada por un círculo. Cada rótula tiene un solo grado de movilidad que en RM no redundantes es sinónimo de un solo grado de libertad (*dof*).

En articulaciones prismáticas no hay rotación entre segmentos sino deslizamiento del uno respecto al otro.

Las rótulas son accionadas por motores eléctricos, neumáticos o hidráulicos y los lazos de control, o servomecanismos, pero ellos serán tratados en un capítulo posterior.

Un *dof* representa un movimiento independiente y generalmente son necesarios los 6 *dof* indicados en la figura 1.2, como, por ejemplo, en tareas de armado o ensamblado. Un IR para pintura o soldadura podría requerir 5 *dof*, en tanto que 3 *dof* pueden ser suficientes para transferir piezas entre dos puntos.

Para el caso de un cuerpo en el espacio tridimensional se tiene que 6 *dof* determinan unívocamente su posición y orientación y ellos son traslaciones a lo largo de los ejes *x*, *y*, *z* y rotaciones en torno a estos, respectivamente. En espacio de dos dimensiones (un plano) bastan dos traslaciones y una rotación.



Por cinemática (en RM) se entiende el estudio de movimientos lineales o angulares sin considerar las fuerzas o momentos, respectivamente, asociados con ellos. Por movimiento se subentiende cambios de posición, velocidad y aceleración, y de derivadas temporales más altas.

La cinética (en RM) envuelve consideraciones de fuerza, momentos, energías, masa, e inercia, equilibrio, estabilidad, y otros conceptos.

Por dinámica (en RM) se entiende la combinación de cinemática y cinética.

## 1.4. Organización global del robot

En la figura 1.3 se bosquejó un manipulador y su sistema controlador. En esta sección se explicará con más detalles la organización global del sistema de control. Los servomecanismos y lazos de control de las rótulas serán tratados en un capítulo posterior.

La organización global de un IR (robot industrial) es presentada en figura 1.3.

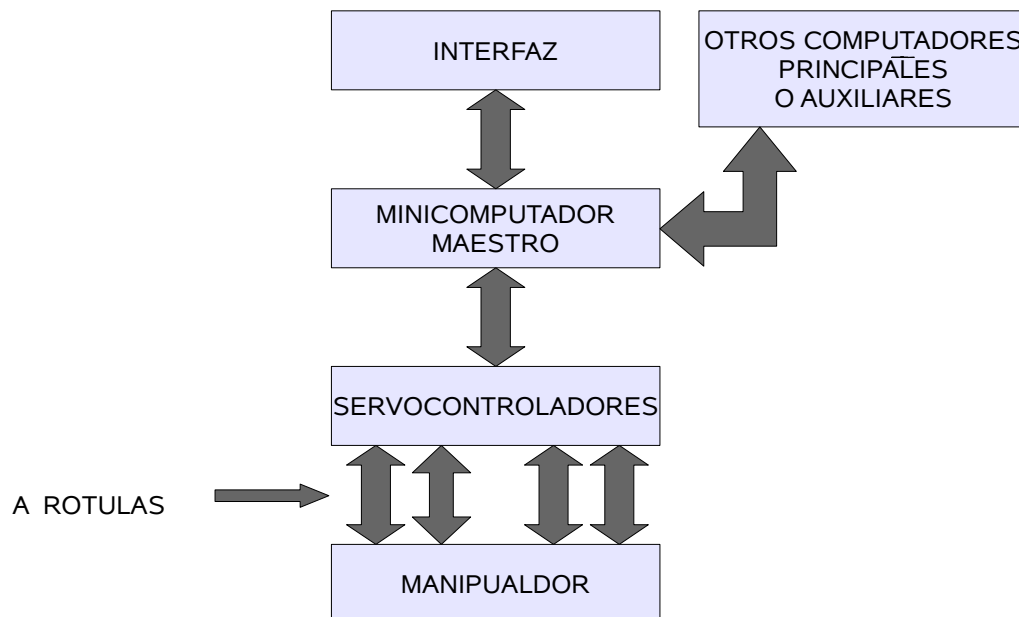


Figura 1.3: Organización de un Robot Industrial (IR).

La interfaz del usuario consta de teclado, conmutadores (joysticks), pantalla y un controlador manual (teachpendant). El (micro)computador maestro supervisa el con-

trol y operación globales del robot, de acuerdo con programas y datos internos y con instrucciones recibidas desde la interfaz y algún otro computador de mayor jerarquía y emite comandos a los servocontroladores. Puede usar además microcomputadores auxiliares como, por ejemplo, para cómputos paralelos o intermedios. Dispone de memorias RAM, ROM y de burbujas para mantener o modificar datos e instrucciones.

Los servocontroladores son, en general, microprocesadores que aceptan instrucciones digitales y emiten (mediante conversores digital/análogos) comandos hacia servoaccionadores, uno por rótula. Estos, a su vez, comandan los servomotores montados en las rótulas, emitiéndoles señales de activación o de freno. Desde las rótulas hay realimentaciones de potenciómetros y tacómetros o codificadores ópticos, según sea el caso. En general se tiene un microprocesador servocontrolador por rótula.

En el accionamiento del manipulador surgen dos problemas básicos. El problema directo consiste en determinar la posición (y orientación) de la mano dados los ángulos de las rótulas, o dados los voltajes aplicados a los servomotores rotulares. El problema inverso consiste en determinar los ángulos de las rótulas (o los voltajes a aplicar a los servomotores rotulares) necesarios para dar una posición (y orientación) deseada de la mano. En caso de articulaciones prismáticas hay que considerar, obviamente, deslizamientos lineales en vez de ángulos.

## 1.5. Otros conceptos en robótica

En esta Sección se comenta brevemente algunos conceptos importantes en la selección u operación de robots industriales (IR).

### A. Exactitud.

Se refiere a la habilidad del IR para mover su mano, con velocidad especificada, hasta una posición comandada dentro de su espacio de trabajo, portando quizás alguna herramienta. Exactitud es la distancia, o diferencia, entre la posición lograda y la comandada, e idealmente debiera ser nula. Es mejor en sistemas digitales que análogos.

### B. Repetibilidad.

Es la dispersión, o rango, entre las posiciones alcanzadas en varios intentos para ubicar la mano en una posición comandada. Idealmente se debiera lograr la misma posición en los varios intentos, pero, obviamente, ella debiera ser la deseada o exacta.

**C. Velocidad y aceleración.**

Para lograr tiempos mínimos de trabajo o ciclos de fabricación (o máxima productividad o eficiencia) las aceleraciones y velocidades de desplazamiento de la mano (y las rótulas) del IR deberían ser altas. Pero ello complica y encarece el diseño del manipulador y la operación. Por ejemplo, una alta velocidad en la trayectoria requiere estructuras más livianas (onerosas) o cortas (poco alcance) o motores más potentes (mayor costo y peso) y dificulta el alcanzar la posición deseada con velocidad y aceleración nulas (frenos más caros).

**D. Seguridad.**

Los robots industriales tienen partes móviles de gran peso y velocidad y se debe establecer medidas apropiadas de seguridad para los operarios y otras personas y equipos.

**E. Sensado e inteligencia.**

Estos conceptos serán discutidos en un Capítulo posterior.

**F. Robots en manufactura integrada.**

Aunque un robot es interesante y útil en sí mismo o solo, su mayor utilización se encuentra formando parte de sistemas de fabricación computarizada. Los sistemas de manufactura flexible (FMS) usan uno o más IR para realizar tareas de fabricación y armado de bienes discretos. Los robots, además de tareas de traslado de piezas o herramientas, usan éstas para fabricar y ensamblar componentes o unidades completas, sirviendo como máquinas programables para una variedad de tareas u operaciones. Estos sistemas FMS generalmente forman parte de sistemas de manufactura integrada (CIM), de creciente desarrollo.

Estos esquemas de manufactura se han visto dificultados por falta de estandarización entre robots de diversos fabricantes. Hay en pleno desarrollo protocolos para interconexión de máquinas, tales como el Protocolo de Automatización Manufacturera (MAP), complementados por otros, como el Protocolo Técnico de Oficina (TOP), para automatizar todos los aspectos del diseño y operación de sistemas fabriles.

# Capítulo 2

## Coordenadas espaciales y transformaciones

### 2.1. Introducción

Se mencionó en el capítulo anterior que en los problemas directo e inverso se debe relacionar la posición, y orientación, de la mane con los ángulos o desplazamientos de las rótulas. Más aún interesa relacionar la posición y orientación de la mano con los voltajes o señales de comando aplicados, o que se deba aplicar, a los servomotores. Estos problemas envuelven definiciones de sistemas de coordenadas espaciales y transformaciones de coordenadas entre ellos.

Se considera en general en lo que sigue, por simplicidad, sólo los tres grados de libertad de posición de un manipulador revoluto (rótulas giratorias) y con servomotores rotulares eléctricos. Los tres *dof* son de giro de torso o cintura, de hombro y de codo. En un caso real hay que agregar los tres *dof* de orientación de la mano y los movimientos de los dedos (a lo menos de apretar y soltar piezas).

Se debe definir, en consecuencia, varios sistemas de coordenadas. El sistema de coordenadas absoluto es definido en la base del RM (manipulador) supuesta fija. Hay que definir además sistemas de coordenadas en las rótulas y en la muñeca. En relación a este último se define los movimientos de la mano.

En los problemas directo e inverso hay que ir transformando coordenadas rótula a rótula desde la base (rótula o segmento 0) hasta la mano (rótula o segmento  $n + 1$ ), o viceversa.

### 2.2. Coordenadas homogéneas

Es costumbre usar en robótica sistemas de coordenadas homogéneas y estas pueden ser introducidas empleando el esquema mostrado en la figura 2.1.

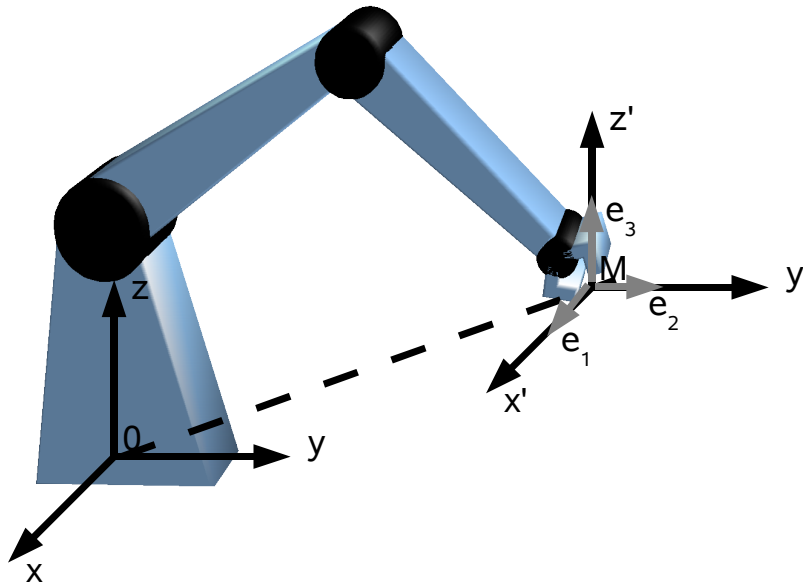


Figura 2.1: Sistemas de coordenadas.

En la figura 2.1 se ha definido un sistema (absoluto) de coordenadas ortogonales  $(x, y, z)$  en la base fija 0 y otro sistema ortogonal  $(x', y', z')$  en la mano M. A lo largo de los ejes  $(x', y', z')$  hay respectivos vectores unitarios  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  ortogonales entre sí. La orientación del sistema  $(x', y', z')$  respecto al  $(x, y, z)$  puede ser descrita por la matriz de rotación

$$\mathbf{R} = [ \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 ] = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{2x} & e_{3x} \\ e_{1y} & e_{2y} & e_{3y} \\ e_{1z} & e_{2z} & e_{3z} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

donde  $e_{kx}$  denota coordenada  $x$  del vector  $k$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

Nótese que  $\mathbf{R}$  es una matriz  $3 \times 3$  invertible (o no singular).

Sea ahora un punto  $P$  cuya posición respecto al sistema centrado en  $M$  es dada por el vector  $\mathbf{q}'$ . La posición de  $P$  respecto al sistema centrado en 0 es dada por

$$\mathbf{p} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{q}' + \mathbf{r} \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector  $\overline{OM}$  desde 0 hasta  $M$ .

La ecuación (2.2) puede ser escrita como una sola multiplicación matricial

$$\mathbf{p} = [ \mathbf{R} \quad \mathbf{r} ] \mathbf{q} \quad (2.3)$$

donde

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q'_x \\ q'_y \\ q'_z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Esta ecuación no se altera si se agrega una cuarta fila [0001] a la matriz, escribiéndola entonces como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{q}' \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} q'_x \\ q'_y \\ q'_z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

donde  $\mathbf{T}$  es la matriz de transformación homogénea

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} & \mathbf{R} & \mathbf{r} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{2x} & e_{3x} & r_x \\ e_{1y} & e_{2y} & e_{3y} & r_y \\ e_{1z} & e_{2z} & e_{3z} & r_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Esta forma  $4 \times 4$  es invertible y, por ende, es muy útil en lo que sigue.

Nótese que  $P$  puede ser un punto variable que describa vértices, lados o formas de algún cuerpo o pieza manipulada por la mano.

### 2.3. Transformaciones de coordenadas en el espacio de trabajo

Las transformaciones de coordenadas homogéneas aparecen en los problemas directo e inverso, como se indicó antes, y ello será considerado más adelante.

Las operaciones y tareas de armado o ensamblado de piezas por un robot pueden ser interpretadas como una sucesión de transformaciones de coordenadas homogéneas. En efecto, los objetivos del movimiento usualmente son dados en base a ubicaciones espaciales y las características de las piezas a manipular son definidas en relación a características de otras piezas o elementos.

En la figura 2.2 se bosqueja una tarea de ensamblado a, b, c. En la figura se ha definido varios sistemas de coordenadas, centrados en O, A, B y C, como  $(x_k, y_k, z_k; k = 0, 1, 2, 3)$ , aunque sólo se dibuja algunos de los ejes coordenados, por claridad.

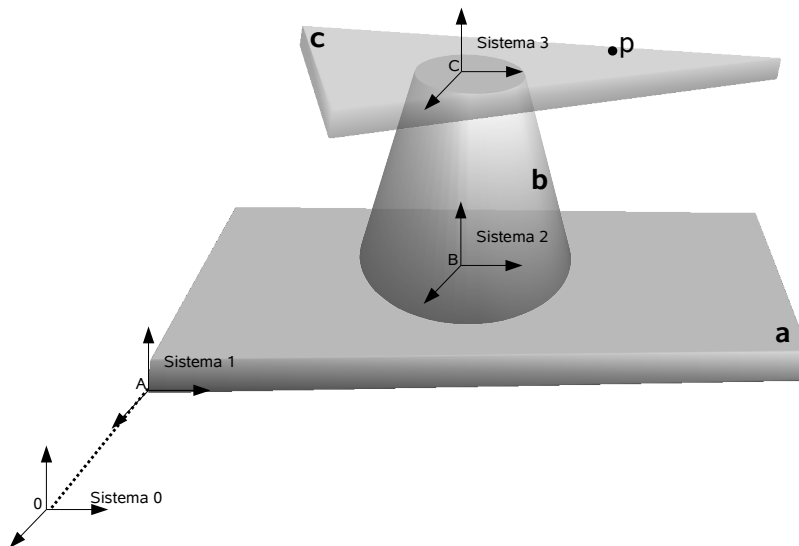


Figura 2.2: Tarea de ensamblado.

Sea el problema de mover la mano (o garra con herramienta) del manipulador al punto  $p$ , en la pieza  $c$ . Si se conoce todas las dimensiones de las piezas  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y sus ubicaciones y orientaciones en el espacio, se puede determinar la posición del punto  $p$  en el sistema de coordenadas (absolutas o fijas) centrado en  $O$  empleando coordenadas homogéneas.

En este problema se conoce, entonces, las coordenadas de  $p$  en el sistema 3 centrado en  $C$ ,  $\mathbf{r}^{(3)} = (x^{(3)}, y^{(3)}, z^{(3)})$ , y se desea determinar su posición  $\mathbf{r}^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$  relativa al sistema  $O$  centrado en  $O$ .

La posición y orientación del sistema de coordenadas 1 respecto al  $O$  es dada por

$$\mathbf{T}_{01} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{01} & \mathbf{r}_{01} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

donde  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{R}$  son matrices y  $\mathbf{r}$  vector definidos en la sección 2.2.

Ecuaciones similares rigen para expresar los sistemas 2 respecto a 1 y 3 respecto a 2. Empleando sucesivamente la ecuación (2.7) se llega a que la matriz que expresa la posición y orientación del sistema 3 respecto al  $O$  es

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{03} = \mathbf{T}_{01} \cdot \mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{T}_{23} \quad (2.8)$$

El vector que da la posición y orientación de  $P$  respecto a  $O$  es dado por

$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{r}^{(3)} \quad (2.9)$$

donde  $\mathbf{r}^{(0)}$  y  $\mathbf{r}^{(3)}$  han sido definidos más arriba.

En forma expandida se tendría

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} x^{(3)} \\ y^{(3)} \\ z^{(3)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Si se desea obtener  $\mathbf{r}^{(3)}$  a partir de  $\mathbf{r}^{(0)}$  se tiene, evidentemente

$$\mathbf{r}^{(3)} = \mathbf{T}_{03}^{-1} \cdot \mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{T}_{23}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{12}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{01}^{-1} \cdot \mathbf{r}^{(0)} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{r}^{(3)} = \mathbf{T}_{30} \cdot \mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{T}_{32} \cdot \mathbf{T}_{21} \cdot \mathbf{T}_{10} \cdot \mathbf{r}^{(0)} \quad (2.12)$$

Estas relaciones pueden ser generalizadas en la forma obvia.

## 2.4. Transformaciones de coordenadas rotulares

En el caso del manipulador mismo, para ir desde la base hacia la mano, o viceversa, se ha de ir multiplicando las matrices de transformación homogéneas, o sus inversas, de rótula en rótula. Pero antes se ha de definir en forma metódica y apropiada los sistemas de coordenadas rotulares, para lo cual hay varios métodos, siendo la notación Denavit-Hartenberg la más usada. En esta convención se asigna a cada rótula un sistema de coordenadas tal que para hacer coincidir los sistemas  $k$  y  $k + 1$  se requiera una sucesión definida de a lo más dos rotaciones y dos traslaciones. Estas, a su vez, se especifican en base a dos parámetros de segmento y dos parámetros de rótulas, los que son definidos como en la figura 2.3.

En la figura 2.3 los ejes de giro de las rótulas se dibujan como  $z_{k-1}$ ,  $z_k$  y  $z_{k+1}$ . Las normales comunes entre estos ejes son indicadas como  $NC$  y se debe notar que los ejes  $z$  y las  $NC$  están fuera del plano del papel. Los parámetros segmentales son:  $a_k$ , la distancia entre ejes  $z_k$  y  $z_{k+1}$  a lo largo de la  $NC_k$  entre éstos;  $\alpha_k$ , el ángulo entre los ejes  $z_k$  y  $z_{k+1}$  divergentes, y perpendiculares a la  $NC_k$ . Los parámetros rotulares son:  $b_k$ , la distancia entre  $NC_k$  y  $NC_{k-1}$  a lo largo de  $z_k$ ;  $\beta_k$ , el ángulo entre  $NC_k$  y  $NC_{k-1}$ .

El sistema de coordenadas de la rótula  $k$  es definido así:  $z_k$ , en dirección del eje de rotación de dirección de la rótula;  $x_k$  en dirección de la  $NC_{k-1}$ , ó  $a_{k-1}$  (hacia  $z_{k-1}$ );  $y_k$ , tal que  $\alpha_k$ ,  $y_k$ ,  $z_k$  formen un sistema ortogonal dextrorso.

Los movimientos elementales requeridos para hacer coincidir el sistema de coordenadas  $k$  con el  $k + 1$ , y las matrices respectivas son:



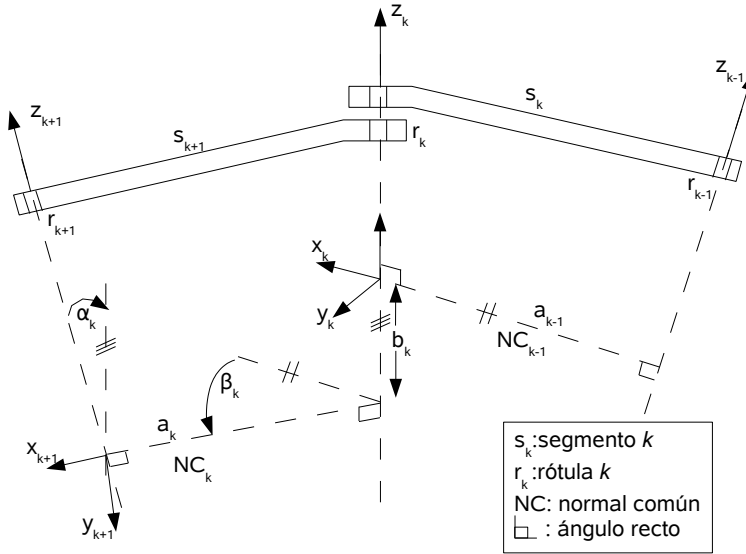


Figura 2.3: Parámetros segmentales y rotulares.

a) Giro en ángulo  $\beta_k$  en torno a  $z_k$ ,

$$A(\beta_k) = \begin{bmatrix} \cos(\beta_k) & -\text{sen}(\beta_k) & 0 & 0 \\ \text{sen}(\beta_k) & \cos(\beta_k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

b) Traducción en distancia  $b_k$  a lo largo de  $z_k$ ,

$$B(b_k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

c) Traducción en distancia  $a_k$  a lo largo de  $x_{k+1}$ ,

$$C(a_k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

d) Giro en ángulo  $\alpha_k$  en torno al eje  $x_{k+1}$ ,

$$D(\alpha_k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_k) & -\text{sen}(\alpha_k) & 0 \\ 0 & \text{sen}(\alpha_k) & \cos(\alpha_k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Así, la matriz de transformación de coordenadas entre sistemas  $k$  y  $k + 1$  es

$$\mathbf{T}_{k,k+1} = A(\beta_k) \cdot B(b_k) \cdot C(a_k) \cdot D(\alpha_k) \quad (2.17)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\beta_k) & -\text{sen}(\beta_k)\cos(\alpha_k) & \text{sen}(\beta_k)\text{sen}(\alpha_k) & a_k \cdot \cos(\beta_k) \\ \text{sen}(\beta_k) & \cos(\beta_k)\cos(\alpha_k) & -\cos(\beta_k)\text{sen}(\alpha_k) & a_k \cdot \text{sen}(\beta_k) \\ 0 & \text{sen}(\alpha_k) & \cos(\alpha_k) & b_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Ésta es la forma más general de la matriz de transformación. La cuarta columna de la matriz en (2.18) da el vector de posición entre los orígenes de los sistemas de coordenadas  $k$  y  $k + 1$ . Para ir de la base a la mano se multiplican matrices de este tipo, análogamente a la ecuación (2.8).

# Capítulo 3

## Transformaciones de coordenadas con ángulos de Euler

### 3.1. Introducción

En aplicaciones de robots, y en muchas otras áreas, se puede describir orientaciones de objetos en términos de ángulos de Euler, que, para los efectos de este capítulo, son giros en torno a los tres ejes  $(x, y, z)$ .

No hay convención sobre el orden de las rotaciones. En este capítulo sólo se verá como ejemplo la sucesión *giro-guiñada-giro* (roll-yaw-roll).

### 3.2. Rotaciones sucesivas

Sea un sistema de coordenadas inicial  $(x, y, z)$  con origen 0. Si este sistema es sometido a una sucesión de giros o rotaciones en torno al mismo origen 0 se obtiene un sistema final, denominado  $(x_3, y_3, z_3)$  para propósitos de este ejemplo. El movimiento de rotación global puede ser descompuesto, en este ejemplo, en la siguiente secuencia de rotaciones simples, en ángulos de Euler  $\alpha, \beta, \gamma$ , indicadas en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1: Giro-guiñada-giro

Sistema Inicial	Rotación en torno al eje (...) en un ángulo [...]	Sistema obtenido
$(x, y, z)$	Giro, $(z)$ , $[\alpha]$	$(x_1, y_1, z_1 = z)$
$(x_1, y_1, z_1)$	Guiñada, $(x_1)$ , $[\beta]$	$(x_2 = x_1, y_2, z_2)$
$(x_2, y_2, z_2)$	Giro, $(z_2)$ , $[\gamma]$	$(x_3, y_3, z_3 = z_2)$

Las matrices de transformación de estos movimientos son, respectivamente:

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{R}_{x1}(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{R}_{x2}(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

La matriz de rotación global es:

$$\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{R}_x(\alpha) \cdot \mathbf{R}_{x1}(\beta) \cdot \mathbf{R}_{x2}(\gamma) \quad (3.4)$$

En la figura 3.1 se dibuja los sistemas y giros indicados.

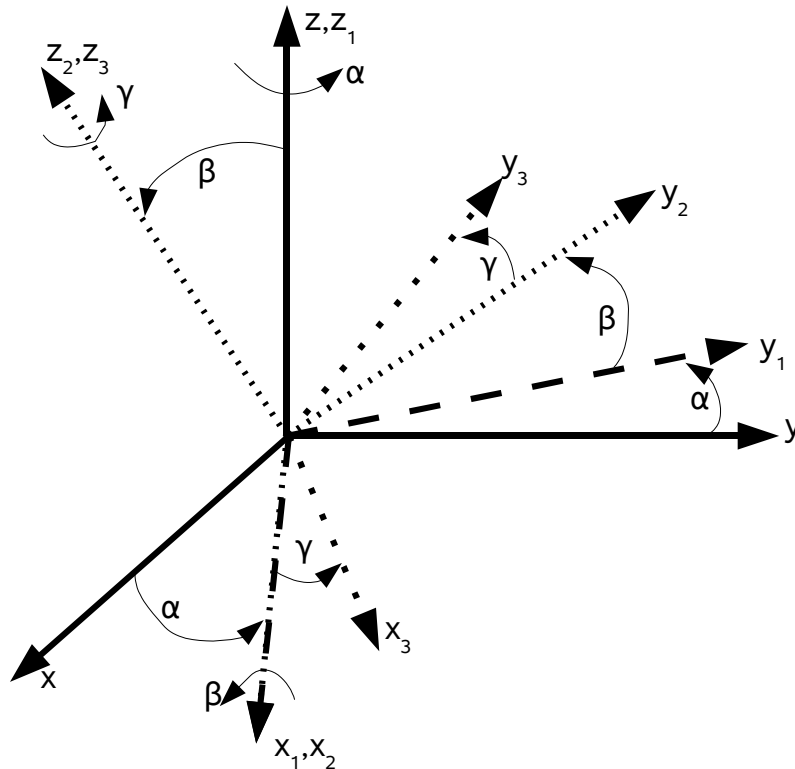


Figura 3.1: Rotaciones sucesivas.

En la ecuación (3.4), la matriz  $\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma)$  ha sido planteada como proviniendo de tres rotaciones simples conocidas. El problema inverso consiste en determinar los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  si la matriz global  $\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma)$  es dada o deseada.

### 3.3. Cálculo de los ángulos de Euler

En esta sección se continúa el caso giro-guiñada-giro e interesa calcular los ángulos de Euler dada la matriz  $\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma)$  en la ecuación (3.4). Sea:

$$\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{3x} & e_{3x} \\ e_{1y} & e_{3y} & e_{3y} \\ e_{1z} & e_{3z} & e_{3z} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Al introducir las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3) en (3.4) e igualar el resultado con las ecuaciones (3.4) y (3.5), se obtiene nueve ecuaciones con tres incógnitas,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ . Empleando cualesquiera tres ecuaciones, se obtiene fórmulas para los ángulos de Euler citados, pero surgen problemas de indefinición de ángulos en ciertos casos. Se considera que, pese a su complejidad, las soluciones recomendables son aquellas con *arctan*, como las siguientes:

$$\alpha = \arctan \left( \frac{e_{2x} \cdot e_{1y} - e_{2y} \cdot e_{1z}}{e_{1x} \cdot e_{2z} - e_{1z} \cdot e_{2x}} \right) \quad (3.6)$$

$$\beta = \arctan \left( \frac{\frac{1}{2} (e_{3x}^2 + e_{3y}^2 + e_{1z}^2 + e_{2z}^2)}{e_{3z}} \right) \quad (3.7)$$

$$\gamma = \arctan \left( \frac{e_{3x} \cdot e_{2y} - e_{2x} \cdot e_{ey}}{e_{1x} \cdot e_{3y} - e_{3x} \cdot e_{1y}} \right) \quad (3.8)$$

### 3.4. Ejemplo de giro de mano robótica

En un sistema de coordenadas  $(x, y, z)$  la garra (con dos dedos) está ubicada inicialmente en la posición  $A = (0, 0, 10)$ , apuntando en la dirección  $z$  y con el plano de sus dedos paralelo al plano  $(x, z)$ . La garra ha de ser trasladada al punto  $B = (1, 93; 2, 62; 0, 24)$  en que el plano de los dedos ha de ser paralelo con el plano  $Bz$ . Entonces, los ángulos de Euler de giro-guiñada-giro son, de ecuaciones (3.6) a (3.8):

$$\alpha = 214^\circ \quad (3.9)$$

$$\beta = 138^\circ \quad (3.10)$$

$$\gamma = 0^\circ \quad (3.11)$$

# Capítulo 4

## Formulación de tareas de manipulación

### 4.1. Introducción

En este capítulo se presenta algunas nociones de modelado de tareas de manipulación de objetos en el espacio de trabajo de un robot. Estos métodos de modelado son necesarios para desarrollar operaciones robóticas programadas para ensamblado, fabricación u otras labores.

Una tarea de manipulación puede ser analizada y descrita como una sucesión de posiciones y orientaciones de la garra, mano o efector del robot. Se supone que las piezas o partes a ser manipuladas son inicialmente estáticas y que sólo el robot es controlable.

La programación de movimientos a ser ejecutados puede ser hecha de varias maneras: por replicación; por puntos a recorrer; por estados y acciones a ejecutar en cada uno de ellos; por lenguajes de alto nivel generales o especiales.

### 4.2. Tarea de ensamble

Algunas de las labores más simples a ejecutar por robots industriales son las de ensamblado de partes o piezas. La colocación de una pieza en otra es una tarea que aparece comúnmente en esas labores. Típicamente, el robot debe asir (agarrar) una pieza A, trasladarla hasta una posición de acercamiento a otra pieza B fija, orientándola al mismo tiempo para aparearlas correctamente, de acuerdo a la índole del ensamble. Ejemplos son la inserción de un tarugo en un hueco o la colocación de un tornillo frente a una tuerca fija.

En la figura 4.1 se presenta el caso de un manipulador de seis *dof* que ha de asir una pieza desde una mesa y eolocarla en un marco fijo a la misma mesa.

La pieza a ser insertada es un tarugo en forma de paralelepípedo de altura  $h$  y

base cuadrada de lado  $a$ ,  $a < h$ . El marco tiene un hueco interior cuadrado de lado  $b$ ,  $b$  algo mayor que  $a$ . El manipulador tiene tres *dof* de posicionamiento, su muñeca tres *dof* de orientación y su garra tiene dedos para asir piezas. El manipulador tiene base fija y en ella se define un sistema de coordenadas absoluto. Las dimensiones y posición del marco y la posición inicial del tarugo son las indicadas en la figura y se suponen conocidas. En el marco y el tarugo se define, en los vértices  $A$  y  $B$ , los sistemas de coordenadas respectivos.

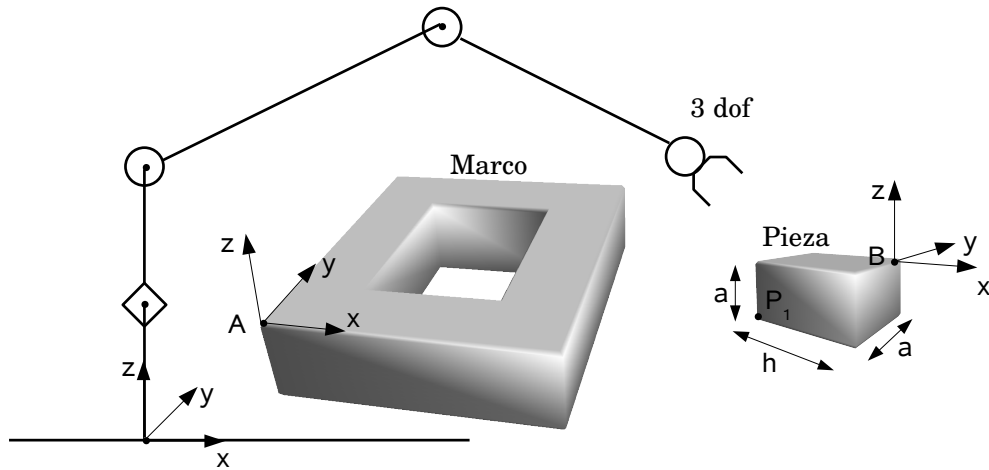


Figura 4.1: Un tarea de ensamble.

El tarugo puede ser descrito en coordenadas homogéneas relativas a su propio sistema de coordenadas, por una matriz  $\mathbf{B}$ ,  $4 \times 8$ . Las ocho columnas corresponden a las coordenadas homogéneas de los respectivos ocho vértices del tarugo, en un orden arbitrario pero prefijado. Por ejemplo, la columna correspondiente al punto  $B$  sería  $[0, 0, 0, 1]^T$ , en tanto que la columna correspondiente al vértice  $B_1$  sería  $(-h, -a, -a, 1)^T$  (T: transpuesta).

Asimismo, el marco, que tiene 16 vértices, puede ser descrito, en coordenadas homogéneas respecto a su propio sistema de coordenadas, por una matriz  $\mathbf{A}$ ,  $4 \times 16$ . Por ejemplo, la columna correspondiente al punto  $A$  es  $(0, 0, 0, 1)^T$ .

El manipulador podría efectuar las operaciones de traslado, orientación, enfrentamiento e inserción mediante una secuencia de comandos (ASIR, MOVER, SOLTAR, ...) en algún lenguaje de alto nivel, general o especializado. Para propósitos de ilustración se indica en la figura 4.2 la secuencia ASIR  $\rightarrow$  MOVER  $\rightarrow$  SOLTAR.

La matriz de transformación homogénea  $\mathbf{T}_{o,i}$  para el estado inicial del tarugo es, naturalmente,  $4 \times 4$ , cuyas 3 primeras columnas dan la dirección de los ejes del sistema de coordenadas girado y cuya cuarta columna da la posición del origen de referencia del tarugo respecto a la base del robot.

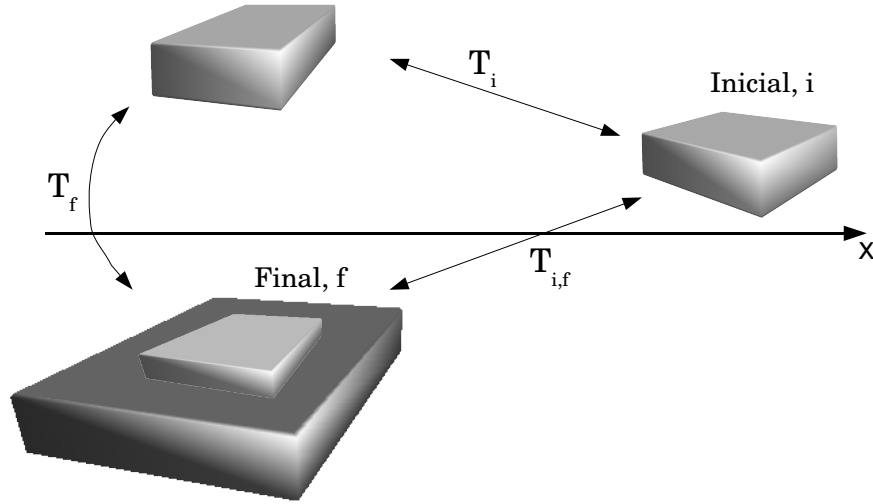


Figura 4.2: Transformaciones homogéneas.

Rige entonces la siguiente ecuación matricial:

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{T}_{o,i} \cdot \mathbf{B} \quad (4.1)$$

para la matriz de ubicación inicial  $\mathbf{B}_i$  del tarugo respecto a la base del robot. Nótese que  $\mathbf{T}_{o,i}$  y  $\mathbf{B}$  son dadas, por inspección.

En forma similar, se obtiene por inspección la matriz  $\mathbf{T}_{o,f}$  de transformación homogénea del hueco del marco,  $A_i$ , o ubicación final,  $B_f$ , que tendrá el tarugo. Se tiene la relación matricial

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{A}_i = \mathbf{T}_{o,f} \cdot \mathbf{A} \quad (4.2)$$

donde  $B_t$  y  $A_i$  son referidas a la base del robot.

La transformación entre los estados inicial y final es definida por la matriz  $T_{i,f}$ . Rige el producto matricial

$$\mathbf{T}_{o,f} = \mathbf{T}_{o,i} \cdot \mathbf{T}_{i,f} \quad (4.3)$$

donde  $\mathbf{T}_{o,i}$  y  $\mathbf{T}_{o,f}$  son conocidas. Entonces

$$\mathbf{T}_{i,f} = \mathbf{T}_{o,i}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{o,f} \quad (4.4)$$

Se ha considerado que estas transformaciones corresponden a comandos ASIR→MOVER→SOLTAR. Esta es una simplificación pues faltan otros comandos como ACERCARSE, ALEJARSE y GIRAR, ALEJARSE, SOLTAR y ALEJARSE, y otros.



# Capítulo 5

## Modelado de manipuladores

### 5.1. Introducción

Se considera en este capítulo el modelado de la geometría de manipuladores, lo que consiste en asignar sistemas de coordenadas a las rótulas y relacionar las variables de la mano con las rotulares.

Se ha indicado que un manipulador robótico consiste en una serie de segmentos activados por rótulas. Además, se explicó el uso de coordenadas homogéneas y las transformaciones matriciales del tipo

$$\mathbf{T}_{0,k} = \mathbf{T}_{0,1} \cdot \mathbf{T}_{1,2} \cdots \mathbf{T}_{k-1,k} \quad (5.1)$$

donde  $\mathbf{T}_{k-1,k}$  es una matriz que relaciona el estado del segmento  $k$ -ésimo al  $k - 1$  y  $\mathbf{T}_{0,k}$  lo relaciona con la base del robot.

### 5.2. Estados de la mano del robot

Se recuerda que el objetivo de un manipulador es llevar, con arbitraria orientación, su mano o una herramienta, o pieza, a cualquier punto en su espacio de trabajo. Así, un manipulador no redundante requiere a lo menos tres grados de libertad (*dof*) cartesianos para llevar la mano a un punto  $(x, y, z)$  y tres *dof*  $(\alpha, \beta, \gamma)$  -por ejemplo, ángulos de Euler- para orientar aquella.

En la figura 5.1 se muestra el esquema de un manipulador 6R, o sea compuesto, de seis uniones rotatorias.

Designando por  $\mathbf{r} = (x_m, y_m, z_m)$  la posición del origen,  $0_m$ , de coordenadas de la mano respecto al origen  $O$  de la base, se expresa el estado de la mano como

$$S_m = f(x_m, y_m, z_m, \alpha_m, \beta_m, \gamma_m) \quad (5.2)$$

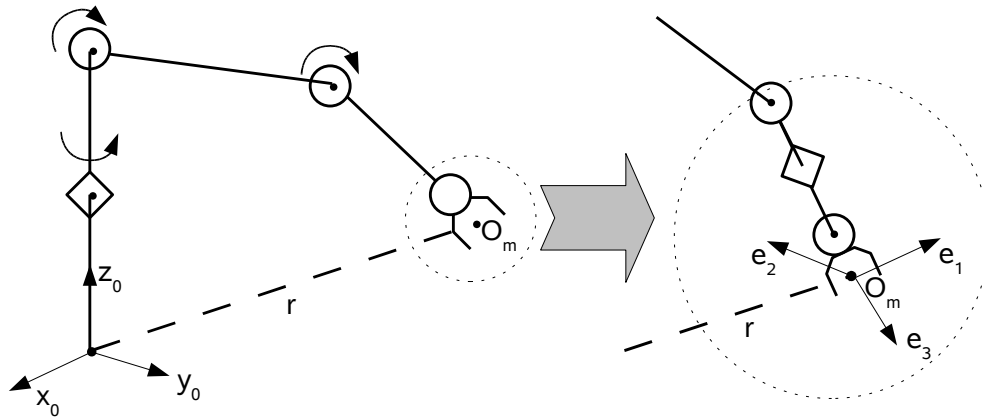


Figura 5.1: Manipulador 6R y su mano.

Estas seis variables independientes determinan la posición y orientación de los vectores unitarios  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  del sistema de coordenadas de la mano respecto al de la base.

El vector (unitario)  $\mathbf{e}_3$ , de "acercamiento", es tomado en la dirección en que la mano se acerca al objeto a asir. El vector  $\mathbf{e}_1$ , de "orientación", apunta desde un dedo al otro y el vector  $\mathbf{e}_2$ , "normal", es tomado en dirección tal que  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$ .

La matriz que relaciona el sistema homogéneo de la mano con el de la base puede ser expresado de dos maneras:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{0,6} = \mathbf{T}_{0,1} \cdot \mathbf{T}_{1,2} \cdot \mathbf{T}_{2,3} \cdot \mathbf{T}_{3,4} \cdot \mathbf{T}_{4,5} \cdot \mathbf{T}_{5,6} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{3x} & e_{3y} & r_x \\ e_{1y} & e_{3y} & e_{3z} & r_y \\ e_{1z} & e_{3z} & 0 & r_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

### 5.3. Ejemplo del cálculo de la matriz $T$

En la tabla 5.1 se muestra los parámetros Denavit-Hartenberg para un manipulador (Hitachi) 6R.

Tabla 5.1: Parámetros Denavit-Hartenberg para un manipulador 6R.

Variable	Número del segmento						
	0	1	2	3	4	5	6
$\alpha_x$	-	0	$q_2$	$q_3$	0	$q_5$	0
$\beta_x$	-	$q_1$	0	0	$q_4$	0	$q_6$
$a_x$	0	0	0	0	0	0	0
$b_x$	$A$	0	$B$	$C$	0	0	$D$

La posición de referencia (home) de la mano es  $(0; 0; A + B + C + D)$  y Euler) es  $(0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$ .

Las matrices homogéneas de este manipulador son indicadas a continuación.

$$\mathbf{T}_{0,1} = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\text{sen}(q_1) & 0 & 0 \\ \text{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{T}_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_2) & -\text{sen}(q_2) & 0 \\ 0 & \text{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$\mathbf{T}_{3,4}$  y  $\mathbf{T}_{4,5}$  son similares a  $\mathbf{T}_{0,1}$  cambiando, respectivamente,  $A$  por  $C$  y  $D$ ,  $\cos(q_1)$  por  $\cos(q_4)$  y  $\cos(q_6)$  y, finalmente,  $\text{sen}(q_1)$  por  $\text{sen}(q_4)$  y  $\text{sen}(q_6)$ .

$\mathbf{T}_{2,3}$  es similar a  $\mathbf{T}_{1,2}$  pero con  $B$  en la posición  $(3, 4)$  de la matriz y cambiando además  $\cos(q_2)$  por  $\cos(q_3)$  y  $\text{sen}(q_2)$  por  $\text{sen}(q_3)$ .  $\mathbf{T}_{4,5}$ , por su parte, es similar a  $\mathbf{T}_{1,2}$  con  $\cos(q_5)$  y  $\text{sen}(q_5)$  en vez de  $\cos(q_2)$  y  $\text{sen}(q_2)$ , respectivamente.

La matriz  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{0,6}$  es calculada de la ecuación (5.3) y es muy complicada para presentarla aquí, pero se escribe a continuación dos entradas de la matriz en la ecuación (5.4).

$$e_{1x} = C_1[C_4C_6 - S_4C_5S_6] - S_1[C_{23}(S_4C_6 + C_4C_5S_6) - S_{23}S_5S_6] \quad (5.7)$$

$$r_x = D[C_1S_4S_5 + S_1(C_{23} + C_4S_5)] + S_{23}C_5 + S_1(KS_{23} + BS_2) \quad (5.8)$$

donde  $C_k = \cos(q_k)$ ,  $S_k = \text{sen}(q_k)$ ,  $C_{23} = \cos(q_2 + q_3)$ ,  $S_{23} = \text{sen}(q_2 + q_3)$  y  $K$  denota, para evitar confusión, la longitud  $C$  del segmento 3.

## 5.4. Programación y computación

En un robot industrial los cálculos de las matrices  $\mathbf{T}$  deben ser efectuados en tiempo real y, por ende, se ha de reducir la complejidad y el número de las operaciones aritméticas. Las funciones  $\text{sen}(x)$  y  $\text{cos}(x)$  pueden ser preprogramadas en memorias ROM. Las multiplicaciones debe ser reducidas al mínimo, pues envuelven mucho tiempo, en comparación con sumas y restas.

El cálculo de la matriz  $\mathbf{T}$ , homogénea, envuelve, para un robot 6R, 320 multiplicaciones, en principio. Sin embargo, considerando varias características de las matrices homogéneas, y diversas maneras de efectuar cálculos de algunas de esas matrices, se podría reducir multiplicaciones requeridas a un número entre 38 y 80, dependiendo del procedimiento.

# Capítulo 6

## Modelado con matrices inversas

### 6.1. Introducción

En el problema inverso del manipulador robótico interesa determinar los ángulos rotulares a partir del estado (posición y orientación) de la mano.

En el caso de un manipulador de 6 uniones, que consideraremos revolutas, se vio en el capítulo 5 que la matriz homogénea de base a mane es dada como

$$\mathbf{T}_{0,6} = \mathbf{T}_{0,1} \cdot \mathbf{T}_{1,2} \cdot \mathbf{T}_{2,3} \cdot \mathbf{T}_{3,4} \cdot \mathbf{T}_{4,5} \cdot \mathbf{T}_{5,6} \quad (6.1)$$

donde las diversas matrices tienen términos polinomiales en senos y cosenos de los ángulos rotulares ( $q_k$ ).

Si el estado de la mano es conocido, como lo es también  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{0,6}$ , para determinar los ángulos rotulares habría que resolver el conjunto de doce ecuaciones polinomiales, seis para senos y seis para cosenos. Esto habría que hacerlo por eliminación sucesiva de variables hasta llegar a una sola ecuación de alto orden con una incógnita.

### 6.2. Método con matrices inversas

En la ecuación (6.1), para un estado (posición y orientación) de la mano, y con  $\mathbf{T}$  conocida, interesa calcular los ángulos de las rótulas. Estos aparecen en las respectivas matrices homogéneas  $\mathbf{T}_{k-1,k}$  y, por ende, hay que determinar estas por sucesivas pre-multiplicaciones en la forma

$$\mathbf{T}_{1,6} = \mathbf{T}_{0,1}^{-1} \cdot \mathbf{T} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{T}_{2,6} = \mathbf{T}_{1,2}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{1,6} \quad (6.3)$$

$$\mathbf{T}_{3,6} = \mathbf{T}_{2,3}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{2,6} \quad (6.4)$$

$$\mathbf{T}_{4,6} = \mathbf{T}_{3,4}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{3,6} \quad (6.5)$$

$$\mathbf{T}_{5,6} = \mathbf{T}_{4,5}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{4,6} \quad (6.6)$$

Las ecuaciones en senos y cosenos son combinadas usando ecuaciones *arctan* de dos argumentos, para evitar ambigüedades de cuadrantes.

### 6.3. Un ejemplo simple

Sea el caso de un manipulador 4R con parámetros indicados en la Tabla 6.3.

Tabla 6.1: Parámetros de un manipulador simple.

Rótula	$q_k$	$\beta(^{\circ})$	$a_k$	$b_k$
1	$q_1$	90	0	$b_1$
2	$q_2$	0	$a_2$	0
3	$q_3$	0	$a_3$	0
4	$q_4$	90	0	0

Se tiene, para  $k = 1, 2, 3, 4$ ,

$$\mathbf{T}_{k-1,k} = \begin{bmatrix} \cos(q_k) & -\cos(\beta_k) \cdot \text{sen}(q_k) & -\text{sen}(\beta_k) \cdot \text{sen}(q_k) & A_k \cdot \cos(q_k) \\ \cos(q_k) & -\cos(\beta_k) \cdot \cos(q_k) & -\text{sen}(\beta_k) \cdot \cos(q_k) & A_k \cdot \text{sen}(q_k) \\ 0 & \text{sen}(\beta_k) & \cos(\beta_k) & b_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Sea una  $\mathbf{T}_{0,1}$  dada como

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{2x} & e_{3x} & r_x \\ e_{1y} & e_{2y} & e_{3y} & r_y \\ e_{1z} & e_{2z} & e_{3z} & r_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Entonces, empleando las ecuaciones (6.2) a (6.6), especializadas a este caso, con la ecuación (6.7), y resolviendo las ecuaciones resultantes, se obtiene, como ejemplo,

$$q_1 = \arctan\left(\frac{r_y}{r_x}\right) \quad (6.9)$$

$$q_2 = \arccos\left[\frac{(\cos(q_1)r_x + \text{sen}(q_1)r_y)^2 + (r_z - b_1)^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3}\right] \quad (6.10)$$

# Capítulo 7

## Servocontrol rotular

### 7.1. Introducción

El manipulador robótico es, como se dijo, una sucesión de segmentos separados por rótulas accionadas por motores. En este capítulo se considera los lazos de servocontrol rotular con motores eléctricos.

El manipulador es modelado, como se vio, por un conjunto de ecuaciones diferenciales altamente alineales, acopladas y con parámetros variables. Sin embargo, es costumbre, para el diseño de servocontroles rotulares, adoptar modelos desacoplados y linealizados en torno a puntos que representan operaciones típicas. Es posible entonces emplear los conocidos métodos de diseño básicos de control automático lineal, por ejemplo los métodos frecuenciales. Se trata, en general, de emplear modelos linealizados de segundo orden para los lazos de control rotulares. Para evitar sobrepaso del manipulador se diseñan lazos levemente sobreamortiguados. Los diseños deben ser suficientemente robustos por dicha razón y para absorber cambios de parámetros durante la operación del manipulador y de acoplamientos con otras rótulas.

Además de tales controles básicos se ha propuesto en la literatura el empleo de muchos otros métodos avanzados de control tanto rotulares como globales para el robot, algunos de los cuales serán vistos en un capítulo posterior.



## 7.2. Lazos de control rotular

En la figura 7.1 se muestra un típico sistema para el servocontrol de una rótula.

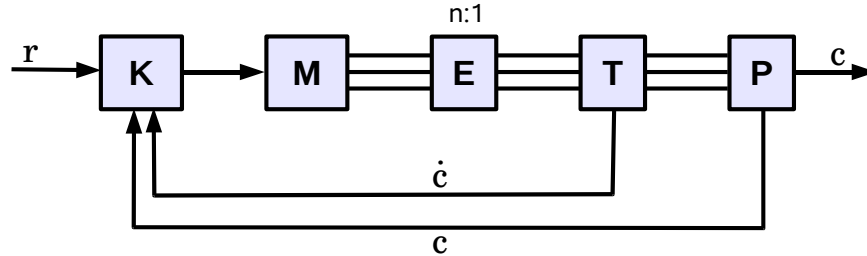


Figura 7.1: Servocontrol rotular.

En la figura 7.1, la salida  $c$  representa el ángulo posicional de la rótula y la entrada  $r$  es una señal de referencia o de comando para dicho  ngulo. Se considera aquí que  $r$  es una señal continua (análoga) pero, generalmente, emanar  de una señal digital que proviene de un microcomputador y que pasa luego por un conversor D/A.

En la figura,  $K$  (llamado controlador) representa diversas funciones de comparación, amplificación y formación de acciones de control a aplicar al motor  $M$ . Este motor, a su vez, mueve la rótula a través de engranajes  $E$ .

El controlador  $K$  recibe realimentaciones de posición ( $c$ ) obtenidas con un potenciómetro o codificador  $P$  y de velocidad ( $\dot{c}$ ) obtenidas con un tacómetro  $T$ .

No se ha incluido en la figura 7.1 diversos otros componentes, tales como freno, compensador de gravedad, y otros.

El modelo matemático de este sistema linealizado es obtenido de las ecuaciones de balance de voltajes y de momentos, en forma muy conocida.

Se obtiene así una ecuación diferencial de la forma

$$J_2 \cdot \ddot{c}(t) + (D + K_v \cdot K)\dot{c}(t) + K \cdot c(t) = K \cdot r(t) \tag{7.1}$$

donde  $J_2$  es la inercia efectiva total reflejada en eje de salida (rótula),  $D$  es la amortiguación viscosa y  $K_v$  es la constante de velocidad del motor. La constante  $K$  es dada por

$$K = n \cdot A \cdot K_m \tag{7.2}$$

donde  $n$  es la razón de engranajes,  $A$  es la ganancia del controlador  $K$  y  $K_m$  es la constante de momento del motor.

La función de transferencia entre salida y entrada es

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2} \tag{7.3}$$

donde

$$w_n = \sqrt{\frac{K}{J_2}} \quad (7.4)$$

$$\xi = \frac{D + K_v \cdot K}{2\sqrt{K \cdot J_2}} \quad (7.5)$$

En general, en control rotular la razón de amortiguación  $\xi$  es adoptada entre 1 y 1,05. La radianfrecuencia natural  $w_n$  varía con la inercia. Esta a su vez puede variar en una razón  $\frac{J_{2max}}{J_{2min}} = 10$ , por lo que puede variar en un rango de 3 a 1. Para evitar oscilaciones naturales, hay que elegir convenientemente algunos de los parámetros del sistema de control, lo que junto con problemas de errores permanentes y su compensación es tratado en textos básicos de control automático.

# Capítulo 8

## Dinámica de robots

### 8.1. Introducción

La dinámica de manipuladores robóticos integra conceptos de cinemática -movimientos mecánicos- y de cinética -fuerzas y momentos- para plantear ecuaciones de movimiento de los segmentos y rótulas del manipulador frente a fuerzas y momentos aplicados a ellos exógenamente o por la interacción con segmentos vecinos.

Se supone conocimientos básicos sobre las ecuaciones de Newton (movimiento lineal) y de Euler (movimiento rotatorio) y se plantea modelos Newton-Euler para el movimiento del manipulador.

### 8.2. Ecuaciones de velocidad y aceleración

En la figura 8.1 se muestra sistemas de coordenadas definidos en segmentos vecinos, y representados por vectores unitarios  $x_k$ , etc.

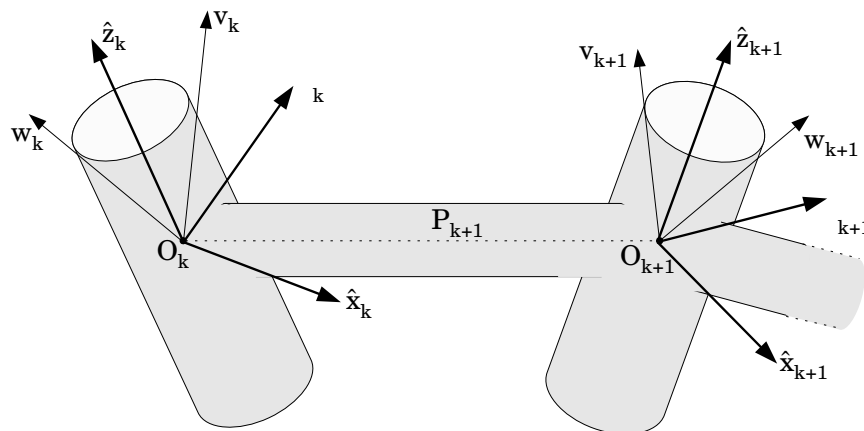


Figura 8.1: Coordenadas en segmentos vecinos.

Para computar las fuerzas inerciales que actúan sobre los segmentos se debe calcular las velocidades y aceleraciones del centro de masa de cada segmento en cualquier instante. Estos cálculos van progresando del segmento 1 hasta el segmento  $n$  y pueden ser expresados matricialmente como:

$$w^+ = Tw + \dot{\theta}\hat{z} \quad (8.1)$$

$$\dot{w}^+ = T\dot{w} + Tw \times \dot{\theta}\hat{z} + \ddot{\theta}\hat{z} \quad (8.2)$$

$$\dot{v}^+ = T[\dot{w} \times P + w \times (w \times P) + \dot{v}] \quad (8.3)$$

$$\dot{v}_C^+ = \dot{w}^+ \times P_C^+ + w^+ \times (w^+ \times P_C^+) + \dot{v}^+ \quad (8.4)$$

En estas ecuaciones los diversos símbolos representan lo siguiente:

- $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ : Vectores de posición, velocidad y aceleración de la rótula  $k + 1$ , supuestos como datos.
- $v$  y  $\dot{v}$ : Vectores de velocidad y aceleración lineales del segmento  $k$ .
- $v^+, \dot{v}^+$ : Vectores de velocidad y aceleración lineales del segmento  $k + 1$ .
- $w$  y  $\dot{w}$ : Vectores de velocidad y aceleración angulares del segmento  $k$ .
- $w^+, \dot{w}^+$ : Vectores de velocidad y aceleración angulares del segmento  $k + 1$ .
- $T$ : Matriz, que gira el eje de rotación de la rótula  $k$  hasta su descripción en coordenadas  $k + 1$ .
- $\hat{z}$ : Vector unitario del eje  $z_{k+1}$  expresado en su mismo sistema de coordenadas.
- $P$ : Vector de posición del origen  $0_k$  y mostrado como  $P_{k+1}$  en la figura.
- $C$  (subíndice): denota centro de masa del segmento  $k + 1$ .
- $\times$ : denota el producto vectorial.

### 8.3. Ecuaciones progresivas de fuerzas y momentos

Las ecuaciones progresivas (de segmentos 1 a  $n$ ) para las fuerzas y momentos  $N$  en los centros de masa de cada segmento son expresables como

$$F^+ = m^+ \cdot \dot{v}_C^+ \quad (8.5)$$

$$N^+ = I \cdot \dot{w}^+ + w^+ \times I \cdot w^+ \quad (8.6)$$

donde:

- $F^+$ : Fuerza en el centro de masa del segmento  $k + 1$ .
- $N^+$ : Momento en el centro de masa del segmento  $k + 1$ .
- $I$ : Tensor de inercia del segmento  $k + 1$  referido a su centro de masa.

## 8.4. Ecuaciones retrogresivas de fuerzas y momentos

Habiendo computado las fuerzas y momentos que actúan sobre cada segmento, se debe calcular los momentos rotulares que resultarán en aquellas fuerzas y momentos netos. Esto se hace por balances de fuerzas y momentos en cada segmento, obteniéndose las ecuaciones siguientes, que van retrogresivamente desde el segmento  $n$  al 1:

$$f = R' \cdot f^+ + F \quad (8.7)$$

$$n = N + R' \cdot n^+ + P_C \times F + P \times (R' \cdot f^+) \quad (8.8)$$

donde:

- $f$ : Vector de fuerza ejercido sobre el segmento  $k$  por el segmento  $k - 1$ , expresado en coordenadas  $k$ .
- $n$ : Vector de momento ejercido sobre el segmento  $k$  por el segmento  $k - 1$ , expresado en coordenadas  $k$ .
- $f^+$ : Vector de fuerza ejercido sobre el segmento  $k + 1$  por el segmento  $k$ , expresado en coordenadas  $k + 1$ .
- $n^+$ : Vector de momento ejercido sobre el segmento  $k + 1$  por el segmento  $k$ , expresado en coordenadas  $k + 1$ .
- $R'$ : Es la matriz de rotación del eje  $k + 1$  al  $k$ , expresada en coordenadas  $k + 1$ , inversa de la matriz  $R$  definida antes.
- Los demás símbolos ya han sido definidos más arriba.

Las ecuaciones indicadas en este capítulo valen para uniones rotatorias. Para el caso de algunas uniones prismáticas se debe agregar fórmulas tales como

$$\Phi = n^T \hat{z} \quad (8.9)$$

para el vector de fuerzas ejercidas por accionadores lineales.

El conjunto de las ecuaciones dadas constituye el algoritmo Euler-Newton, que consta de ecuaciones progresivas (base a mano) y otras retrogresivas (mano a base).

# Capítulo 9

## Control de posición y de fuerza de robots

### 9.1. Introducción

En este capítulo se trata algunos aspectos del control de posición y del control de fuerza. de un robot o manipulador robótico. En el control de posición, se trata generalmente, de activar las rótulas para que la mano siga una determinada trayectoria en su espacio libre de trabajo. Pero en otras tipos de labores la mano debe entrar en contacto con superficies y sería deseable que ella fuera provista con sensores de fuerza, cuyas señales de retroalimentación puedan ser empleadas para control. Esto conduce al llamado control de fuerza. En otros esquemas de control es necesario recurrir a realimentaciones desde sensores de proximidad, de visión, u otros.

### 9.2. Especificación de trayectorias

La especificación de trayectorias que deba seguir la mano de un robot debe ser simple para el usuario. Por ejemplo, el usuario podría especificar sólo la posición final u objetivo, dejando que el sistema robótico mismo decida la forma del camino para llegar allí, la duración del viaje, el perfil de velocidad, y otros detalles. Interesan además la representación de las trayectorias en el computador y la forma de computar la trayectoria en base a dicha representación interna.

Como ejemplo muy sencillo, sea el caso de especificar una trayectoria libre para llevar una rótula desde un punto  $(\theta = \theta_0, \dot{\theta} = 0)$  en  $t = 0$  hasta otro  $(\theta = \theta_f, \dot{\theta} = 0)$  en  $t = t_f$ . La trayectoria debería ser a lo menos un polinomio cúbico en  $t$ ,

$$\theta(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 \tag{9.1}$$

con:

$$a = \theta_0 \quad (9.2)$$

$$b = 0 \quad (9.3)$$

$$c = \frac{3 \cdot (\theta_f - \theta_0)}{t_0^2} \quad (9.4)$$

$$d = \frac{-2 \cdot (\theta_f - \theta_0)}{t_f^3} \quad (9.5)$$

En un caso mas general, habría que especificar puntos intermedios, con que deba cumplir la mano en su trayectoria (spline).

Entre puntos en el espacio, sean intermedios o extremos, la mano puede ser controlada de modo que siga una línea recta cartesiana, si no hay obstáculos en su camino. Esto requiere comandar apropiadamente las rótulas, mediante métodos matriciales vistos en capítulos anteriores. Estos y otros detalles no serán tratados aquí.

### 9.3. Descripción de caminos con un lenguaje robótico

La especificación de trayectorias puede ser en algún lenguaje robótica. Por ejemplo, la especificación de ir desde un punto base  $A$  a otro punto  $C$  en un intervalo de tiempo 4 puede ser comandada así:

”mover a  $C$  con duración = 4“

Si la duración no interesa y se ha de pasar por un punto intermedio  $B$ , el comando sería:

”mover a  $C$  vía  $B$ “

Estos comandos serían para curvas tipo cúbicas. Se puede especificar trayectorias de vía recta como:

”mover a  $C$  linealmente con duración = 5“

### 9.4. Control de posición

Según se explicó en un capítulo anterior, las rótulas son controladas por motores con realimentación de posición y quizás de velocidad.

El modelo de un manipulador de  $n$  rótulas puede ser escrito en la forma matricial

$$T = I(\theta)\ddot{\theta} + Q(\theta, \dot{\theta}) \quad (9.6)$$

donde:

- $T$ :  $n$ -vector de momentos.
- $\theta$ :  $n$ -vector de posición angular de las rótulas.
- $\dot{\theta}$ :  $n$ -vector de velocidad angular de las rótulas.
- $\ddot{\theta}$ :  $n$ -vector de aceleración angular de las rótulas.
- $I$ : matriz de inercia ( $n \times n$ ).
- $Q$ :  $n$ -vector que representa términos centrífugos, de Coriolis, de fricción viscosa y gravitacionales. Estos términos son funciones alineales, acoplados y muy complicados.

Típicamente se desea que este complicado sistema siga una trayectoria deseada o comandada  $\theta_d(t)$ ,  $n$ -vectorial.

Para controlar se adopta una ley de control basada en el modelo alineal tal que cancele las alinealidades y que sea de la forma:

$$T = AT' + B \quad (9.7)$$

Conviene escoger

$$A = I(\theta) \quad (9.8)$$

$$B = Q(\theta, \dot{\theta}) \quad (9.9)$$

con la ley vectorial de servocontrol

$$T' = \ddot{\theta}_d + K_p e + K_v \dot{e} \quad (9.10)$$

donde

$$e = \theta_d - \theta \quad (9.11)$$

Tales leyes de control de posición son llamadas linealizadoras y desacopladoras. Las matrices  $K_p$  y  $K_v$  son computadas de alguna especificación de comportamiento ideal o deseado.



## 9.5. Control de fuerza

En tareas prácticas de robots industriales la mano debe entrar en contacto con superficies de trabajo, lo que impone ciertas restricciones y además hace necesario el empleo de sensores de visión, proximidad, o de otros tipos.

En la figura 9.1 se muestra un esquema de control híbrido (posición fuerza) de un manipulador cartesiano de 3 grados de libertad

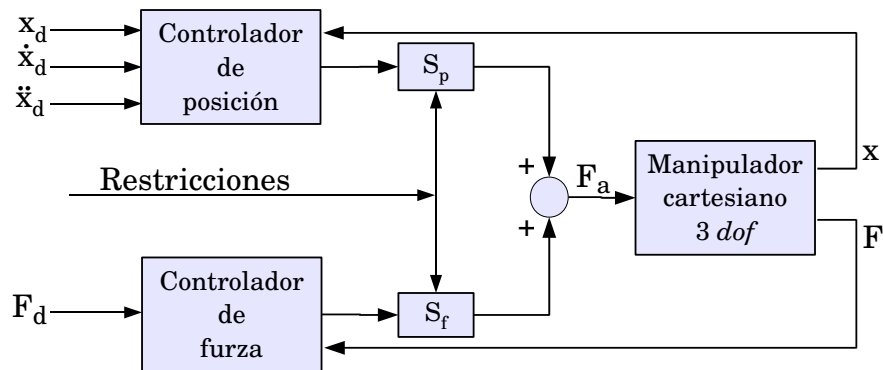


Figura 9.1: Controlador híbrido para un robot cartesiano 3T.

Los términos de la figura 9.1 se definen a continuación:

- $x_d$ : desplazamiento deseado de las articulaciones prismáticas.
- $x$ : desplazamiento efectivo de las articulaciones prismáticas.
- $F_d$ : fuerzas deseadas.
- $F_a$ : fuerzas aplicadas.
- $F$ : fuerzas efectivas.
- $S_p$ : matriz que de acuerdo con las restricciones habilita el controlador vectorial de posición.
- $S_f$ : matriz que de acuerdo con las restricciones habilita el controlador vectorial de fuerza.