UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA

LECTURA 3
GENERACIÓN DE SEÑALES

CURSO	LABORATORIO DE PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES
SIGLA	ELO–385
PROFESOR	RODRIGO HUERTA CORTÉS
AYUDANTE	ALEJANDRO HERRERA

Valparaíso, 23 de febrero de 2004

Introducción

Una señal se define como una cantidad que varía con el tiempo, el espacio o cualquier otra variable o variables independientes. Matemáticamente, se describe una señal como una función de una o más variables independientes. Existen casos en los que la relación funcional es desconocida o demasiado complicada como para tener utilidad práctica.

Por ejemplo, una señal de voz no se puede describir funcionalmente mediante expresiones simples. En general un segmento de voz puede representarse con un alto grado de exactitud como la suma de varias funciones simples de diferentes características.

La intención de esta lectura es poder mostrar y caracterizar tanto las señales en tiempo continuo como en tiempo discreto a través de una serie de definiciones, las cuales serán de utilidad para futuros conceptos tales como generación de señales, filtros digitales, FFT, etc.

Osciladores Digitales

1. Oscilador digital bicuadrático (Biquad)

Un oscilador digital sinusoidal es un tipo de resonador digital cuyos polos (complejos conjugados) se encuentran sobre la circunferencia unitaria. El oscilador digital es un sistema de segundo orden cuya función de transferencia es:

$$H(z) = \frac{R\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2R\cos(\omega_0)z^{-1}+R^2z^{-2}} \tag{1.1}$$

Para que los polos estén ubicados en la circunferencia unitaria es necesario que R = 1. Con ello se logra que el sistema representado por (1.1) oscile con una frecuencia ϖ_0. A partir de la transformada Z inversa de la ecuación (1.1) se puede llegar a la respuesta general a impulso de (1.1), la cual tiene la forma:

$$h(n) = R^n \sin(\omega_0 n)u(n) \tag{1.2}$$

La deducción completa de la obtención de (1.1) a partir de (1.2) es la que se describe a continuación. A partir de la relación trigonométrica:

$$sin(\omega_0 n) = \frac{1}{2j}\left[e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}\right] \tag{1.3}$$

Es posible reescribir *(1.2)* utilizando (1.3):

$$h(n) = \frac{R^n}{2j}\left[e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}\right]u(n) \Rightarrow \frac{1}{2j}\left[(R\cdot e^{j\omega_0})^n u(n) - (R\cdot e^{-j\omega_0})^n u(n)\right] \tag{1.4}$$

Por propiedad de la transformada Z:

$$Z\left[a^n u(n)\right] = \frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad |z| > |a| \tag{1.5}$$

Así, suponiendo que, es posible escribir:

$$H(z) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-R\cdot e^{j\omega_0}z^{-1}} - \frac{1}{1-R\cdot e^{-j\omega_0}z^{-1}}\right] \tag{1.6}$$

Desarrollando (1.6) se obtiene:

$$H(z) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1 - R \cdot e^{-j\omega_0} z^{-1} - 1 + R \cdot e^{j\omega_0} z^{-1}}{(1 - R \cdot e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - R \cdot e^{-j\omega_0} z^{-1})}\right] \tag{1.7}$$

Lo que finalmente, luego de las simplificaciones correspondientes, lleva a la ecuación (1.1)

Gráficamente, (1.1) puede ser sintetizado como se observa en la figura 1. Notar que para que el sistema oscile sólo se requiere que se aplique un impulso a la entrada x.

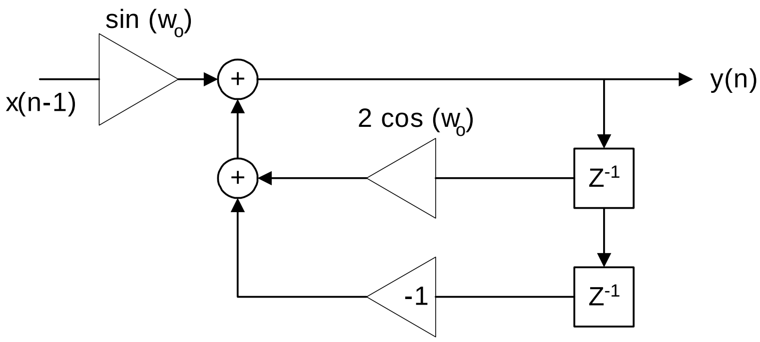

Figura 1: Oscilador digital sinusoidal. Conocido como oscilador Biquad

Donde ω_o recibe el nombre de frecuencia normalizada.

A partir de un oscilador digital es posible sintetizar varios tipos de señales, entre las cuales se pueden destacar:

- AM
- FM
- Scramble (aleatoria).

2. Oscilador Digital en cuadratura

Existen aplicaciones donde la utilización de señales en cuadratura es necesaria. Para generarlas se puede recurrir a la siguiente identidad geométrica:

$$\begin{aligned}\cos(\varphi+\theta) &= \cos(\varphi)\cos(\theta) - \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi+\theta) &= \cos(\varphi)\sin(\theta) + \sin(\varphi)\cos(\theta)\end{aligned} \qquad (2.1)$$

Esta identidad es conocida como *forma acoplada*. El acoplamiento es evidente ya que cada ecuación no sólo utiliza los valores pasados sin que los valores producidos por la otra ecuación. Aquí θ es interpretado como el paso en ángulo en cada iteración, y su elección generará una función de frecuencia $\theta f_s/2\pi$, donde f_s es la frecuencia de muestreo.

Matricialmente la identidad (2.1) puede ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

Esta matriz se puede interpretar de la siguiente forma. El vector columna de la derecha contiene valores antiguos de la salida, los cuales al ser multiplicados por la matriz de rotación, se obtienen los nuevos valores de las salidas. Luego, para la siguiente iteración los “nuevos valores” obtenidos en la última iteración son usados como los valores antiguos en esta iteración.

A partir de la ecuación matricial 2.2 es posible obtener el diagrama de bloques que representa al oscilador en cuadratura. En la figura 2 se muestra su estructura.

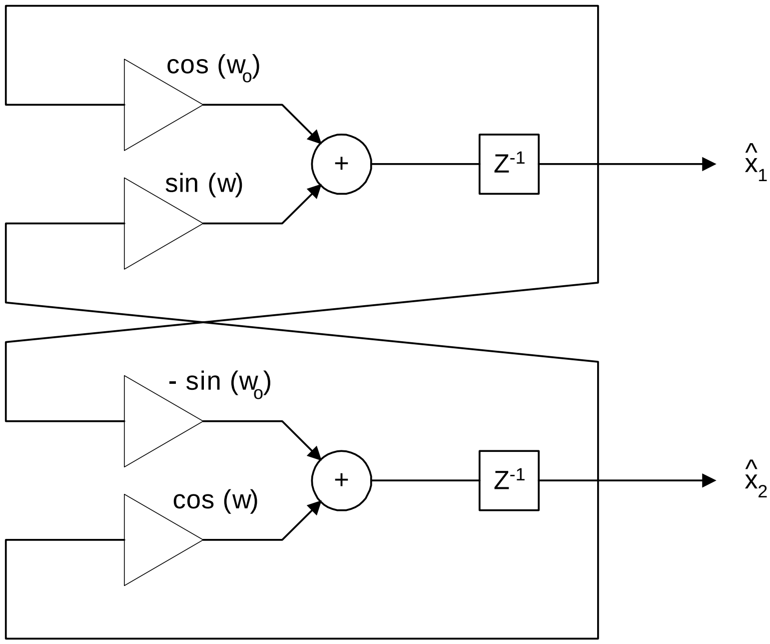

Figura 2: Oscilador acoplado en cuadratura. (Coupled-standard quadrature)

Con las condiciones iniciales apropiadas es posible hacer que éste comience a oscilar.
Las características más importantes de este oscilador son sus salidas en cuadratura y la amplitud de ambas, la cual es la misma.

En general, existen varios tipos de osciladores que pueden ser obtenidos a partir de (2.1) y generalizados como se observa a continuación:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Esta generalización requiere de dos importantes restricciones para que el sistema se comporte como un oscilador. Estas son:

$$\begin{gathered} \boxed{ad - bc = 1} \\ |a + d| < 2 \end{gathered} \tag{2.4}$$

La primera restricción dice que el determinante de la matriz debe ser 1. La segunda restricción dice que la matriz tiene valores propios complejos. Estas restricciones son conocidas como el criterio de oscilación de Barkhausen. A partir de este criterio y un estudio más acabado de los valores propios de la matriz de rotación es posible llegar a determinar condiciones para que el oscilador diseñado tenga la misma amplitud y esté en cuadratura. Para que el oscilador tenga salidas en cuadratura sólo es necesario que $a = d$, y para que tengan la misma amplitud $b = -c$.

Así, por ejemplo, vemos que la matriz siguiente poseerá salidas en cuadratura pero de distinta amplitud:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95 & -1 \\ 0.0975 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

La figura 3 muestra las salidas del oscilador:

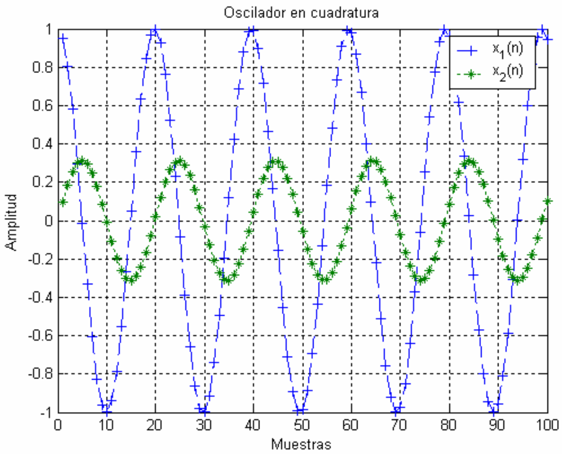

Figura 3: Oscilador digital en cuadratura. Diseño para distintas amplitudes.

En la tabla siguiente se muestra los diferentes tipos de osciladores que se pueden obtener a partir del enfoque matricial, con sus condiciones y propiedades:

Tabla 1: Propiedades de los osciladores digitales recursivos				
Oscilador	Igual Amplitud	Salidas en cuadratura	$k =$	Matriz de Rotación
Biquad	SI	NO	2cos(θ)	$\begin{bmatrix} k & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Digital Waveguide	NO	SI	cos(θ)	$\begin{bmatrix} k & k-1 \\ k+1 & k \end{bmatrix}$
Equi-amplitude-staggered update	SI	NO	2sin(θ/2)	$\begin{bmatrix} 1-k^2 & k \\ -k & 1 \end{bmatrix}$
Quadrature-staggered update	NO	SI	cos(θ)	$\begin{bmatrix} k & 1-k^2 \\ -1 & k \end{bmatrix}$
Coupled-standard quadrature	SI	SI	sin(θ)	$\begin{bmatrix} \sqrt{1-k^2} & k \\ -k & \sqrt{1-k^2} \end{bmatrix}$

En el laboratorio sólo se implementarán el primero y el último de la tabla.

Generación de Señales Digitales

A partir de un oscilador digital es posible generar señales de distinto tipo. A continuación se presentan algunas de ellas

2.1. Modulación de amplitud (AM)

Una señal de frecuencia portadora modulada en amplitud tiene la forma general:

$$S(t) = A_c[1 + mf_s(t)]\cos(\omega_c t) \tag{3.1}$$

donde $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$ es la frecuencia de la portadora y $\|f_S(t)\| < 1$ es la señal de información.
"m" es denominado índice de modulación.

Una señal AM generada digitalmente puede ser realizada a través de la utilización de un oscilador sinusoidal más la adición de una señal externa cualquiera que cumpla con la restricción antes señalada.

2.2. Modulación en frecuencia (FM)

La expresión de una señal portadora sinusoidal modulada en frecuencia tiene la forma:

$$S_{FM}(t) = A_C \cos\left(\omega_C t + K_f \int f(x)dx\right) \tag{3.2}$$

donde *f(t)* es una señal de información, K_f: constante del sistema y ω_c es la frecuencia angular de la señal portadora portadora.

Para simplicidad en el análisis, se supondrá como señal de información un tono puro, esto es:

$$f(t) = A_M \cos(\omega_M t) \tag{3.3}$$

Entonces, la señal modulada toma la forma

$$S_{FM}(t) = A_C \cos\left(\omega_C t + K_f \frac{A_M}{\omega_M} sin(\omega_M t)\right) \tag{3.4}$$

La frecuencia instantánea de la señal portadora es

$\omega_i = \omega_c + k_f * f(t)$ [rad/seg] $\quad \omega_i = \omega_c + k_f * A_m \cos(\omega_m t)$

$f_i = f_c + (k_f * A_m / 2*p) \cos(\omega_m t)$ [Hz]

De la expresión anterior, se puede observar que la máxima desviación de frecuencia de la señal portadora será:

$$df = (k_f * A_m)/(2\pi)\ [Hz]$$

o bien

$$df = f_d * A_m$$

f_d : constante de desviación de frecuencia en [Hz/V].

Se define el índice de modulación de una señal modulada en frecuencia como:

$$ß = df/f_m$$

ó

$$ß = (f_d * A_m)/f_m$$

Finalmente, la señal portadora modulada en frecuencia toma la forma:

$$S_{FM}(t) = A_c \cos\left(\omega_c t + \beta sin(\omega_M t)\right)$$

2.3. Generación de secuencia aleatoria (scrambler)

Para generar una secuencia aleatoria, se suele usar un circuito denominado *scrambler*. En la figura siguiente se muestra un ejemplo del método señalado para secuencia de máximo largo (polinomio primitivo irreductible $x^5 + x^3 + 1$):

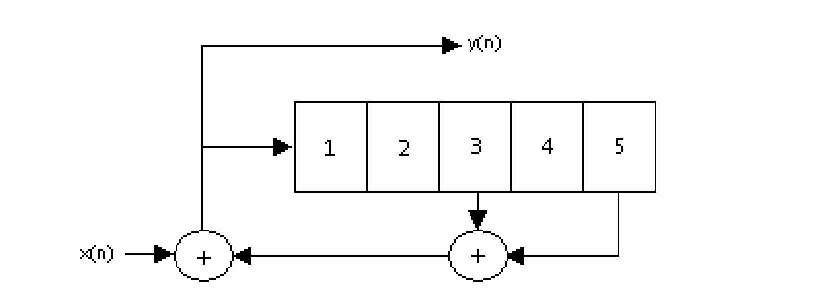

Figura 6: Esquema de un generador de números binarios aleatorios.

Donde $Y_n = X_n \oplus Y_{n-3} \oplus Y_{n-5}$