MARCO TEÓRICO

1. MODELO DE PROPAGACIÓN EN ESPACIO LIBRE – ECUACIÓN DE FRIIS

El modelo de propagación en espacio libre se utiliza para predecir el nivel de potencia recibido en cierta ubicación, cuando existe línea-vista (line-of-sight, LOS) entre el transmisor (Tx) y receptor (Rx). Por ejemplo, este modelo es utilizado en el diseño de los enlaces satelitales.

Este modelo predice que la potencia disminuye en función de la separación "*d*" entre el Tx y Rx, de acuerdo a la ecuación de Friis:

$$P_r(d) = \frac{P_t G_t G_r}{L}\left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 \tag{1}$$

donde P_t es la potencia transmitida, $P_r(d)$ es la potencia recibida –que es una función de la separación entre transmisor y receptor-, G_t es la ganancia de la antena de transmisión, G_r es la ganancia de la antena de recepción, d es la separación Tx-Rx en metros, L son las pérdidas del sistema no relacionadas a la propagación ($L \geq 1$) y λ es la longitud de onda de la señal electromagnética en metros. [3]

Las pérdidas de trayecto (*path loss*) representan la atenuación de la señal como una magnitud positiva, expresada en dB, y están definidas como la diferencia entre la potencia transmitida y recibida de acuerdo a la ecuación (2)

$$PL(dB) = -20\,log\left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right) \tag{2}$$

Vale la pena destacar el hecho que las ecuaciones (1) y (2) sólo son válidas en la región de campo lejano (o región de Fraunhofer), es decir, para aquellas distancias que superen $d_f = 2D^2/\lambda$, $d_f >> \lambda$ donde D es la mayor dimensión lineal de la antena de transmisión.

2. MODELO LOGARÍTMICO DE LAS PÉRDIDAS DE TRAYECTO (LOG-DISTANCE PATH LOSS MODEL)

En muchos casos, los resultados empíricos concuerdan con Friis en un decaimiento logarítmico con la distancia, sin embargo, el exponente cuadrático no es el mejor ajuste a los datos en muchos ambientes de propagación reales.

Las pérdidas del trayecto son generalmente expresadas como función de la distancia mediante un exponente n [3], según:

$$\overline{PL}(d) \propto \left(\frac{d}{d_0}\right)^n \tag{3}$$

donde d_0 es la medición a una distancia de referencia donde se cumplen condiciones de "espacio libre" (típicamente a 1 metro) y d es la separación entre Tx y Rx.

Rappaport [3] entrega una tabla de valores típicos para n:

Enviroment	Path Loss Exponent, n
Free Space	2
Urban area cellular radio	2.7 to 3.5
Shadowed urban cellular radio	3 to 5
In building line of sight	1.6 to 1.8
Obstructed in building	4 to 6
Obstructed in factories	2 to 3

Tabla 1: Exponente del camino de pérdidas para diferentes ambientes.

3. Distribuciones Rayleigh y Rice

En canales de radiofrecuencia que presentan fluctuaciones de potencia de tipo "fading plano en frecuencias" [3], es bastante común utilizar como modelos para la amplitud de la señal recibida distribuciones estadísticas de Rice o Rayleigh. Las fluctuaciones de potencia se deben a variaciones temporales de las características del enlace. En el caso de un enlace entre dos puntos fijos ello se debe al movimiento de elementos dispersores en las cercanías de las antenas. Para el caso en que uno de los terminales es móvil, se producen dos tipos de desvanecimientos:

- Desvanecimientos de gran escala. Corresponden a cambios del valor medio de la señal cuando la distancia del transmisor al receptor varía significativamente. En general el valor medio sigue una relación como (2) ó (3)
- Desvanecimientos de pequeña escala. Cuando el cambio de la distancia es pequeño en relación a la distancia absoluta, los desvanecimientos no se deben al comportamiento de la ecuación de Friis, sino a interferencia constructiva o destructiva de las señales multitrayectoria como función de la posición. Los cambios de posición involucrados son del orden de la longitud de onda y el fenómino se conoce como desvanecimiento espacial de pequeña escala. Por lo general estos desvanecimientos son mucho más significativos que los que se observan en enlaces fijos.

El movimiento de una antena obviamente convierte el desvanecimiento espacial en desvanecimiento temporal.

Es un hecho bien sabido, que la envolvente de la suma de dos señales de ruido Gaussianas en cuadratura obedece una distribución Rayleigh. La distribución Rayleigh posee una función de densidad de probabilidad (pdf) dada por:

$$p(r)=\begin{cases}\dfrac{r}{\sigma^2}exp\left(-\dfrac{r^2}{2\sigma^2}\right) & (0\le r\le\infty)\\ 0 & (r<0)\end{cases} \tag{4}$$

donde σ es el valor rms de la señal de voltaje antes de la detección de envolvente.

La probabilidad que la envolvente de la señal recibida no exceda un valor especificado R está dado por la función de distribución acumulativa (CDF) según:

$$P(R)=Pr(r\le R)=\int_0^R p(r)\,dr=1-exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right) \tag{5}$$

El valor medio r_{mean} de la distribución Rayleigh está dada por:

$$r_{mean}=E[r]=\int_0^\infty rp(r)\,dr=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}=1.2533\sigma \tag{6}$$

Además, la varianza de la distribución Rayleigh está dada por σ_r^2, que representa la potencia AC en la envolvente de la señal:

$$\begin{aligned}\sigma_r^2&=E\left[r^2\right]-E^2[r]=\int_0^\infty r^2p(r)\,dr-\frac{\sigma^2\pi}{2}\\&=\sigma^2\left(2-\frac{\pi}{2}\right)=0.4292\sigma^2\end{aligned} \tag{7}$$

La mediana de r se determina resolviendo

$$\frac{1}{2}=\int_0^{r_{median}} p(r)\,dr \tag{8}$$

y resulta,

$$r_{median}=1.177\sigma \tag{9}$$

Se ha comprobado que esta distribución modela muy bien la condición en que no existe una componente dominante en la señal, lo que físicamente ocurre por lo general para terminales móviles en condiciones donde no existe linea de vista.

Al existir una componente dominante estacionaria (sin fades), como una trayectoria LOS, las componentes multitrayecto arriban en diferentes ángulos y se superponen a la señal dominante. Esto da lugar a una distribución de Rice. Si la señal tiende a cero, la distribución Rice degenera a una distribución Rayleigh.

La distribución Rice está dada por:

$$p(r) = \begin{cases} \dfrac{r}{\sigma^2} exp\left(-\dfrac{r^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\dfrac{Ar}{\sigma^2}\right) & A \geq 0, r \geq 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases} \tag{10}$$

El parámetro A representa la amplitud peak de la señal dominante (determinística) e $I_0(\bullet)$ es la función modificada de Bessel de primer tipo y orden cero.

La distribución Riceana es a menudo descrita en términos del parámetro *K*, definido como la razón entre la potencia de la señal determinística y la varianza de la componente multitrayecto. Está dado por $K = A^2 \big/ \left(2\sigma^2\right)$, o en dB:

$$K(dB) = 10\,log\left(\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) \quad [dB] \tag{11}$$

El parámetro K es conocido como el “factor K” Riceano y describe completamente a la distribución. Si $A \to 0 \Rightarrow K \to -\infty$ dB, y como el trayecto dominante disminuye en amplitud, la distribución Rice degenera a una distribución Rayleigh.[3]

La función de densidad de probabilidad (pdf), de la envolvente de la señal recibida *R(t)*, en términos del parámetro *K* está dada por:

$$f_R(r) = \frac{2(K+1)r}{\Omega} exp\left(-K - \frac{(K+1)r^2}{\Omega}\right) I_0\left(2r\sqrt{\frac{K(K+1)}{\Omega}}\right) \tag{12}$$

$$r \geq 0,\ K \geq 0,\ \Omega \geq 0$$

donde $\Omega = \mathrm{E}\left[R^2\right]$

El estimador ML (maximum likelihood) para Ω es [9]

$$\hat{\Omega} = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} R_i^2 \tag{13}$$

donde N es el número de muestras adquiridas.

Determinar el factor K no es una tarea sencilla, ya que es necesario resolver un sistema de ecuaciones no lineal, o usar algoritmos computacionales complicados. Una aproximación bastante certera es el método de estimadores basado en dos momentos que se discute en la sección siguiente (Two moment-based estimators) [9]

La simulación en Matlab de la distribución Rice se realiza en base a la suma de dos componentes Gaussianas en cuadratura más una componente dominante de la forma: $|r(t)| = \sqrt{\left(A + Gauss_1(0,s)\right)^2 + \left(Gauss_2(0,s)\right)^2}$, donde $Gauss_i(0,s)$ es una variable aleatoria Gaussiana de valor medio 0 y varianza "*s*" y "*A*" es el voltaje de la señal dominante, dependiente del valor de K y "*s*" [3].

4. Método de dos momentos (Estimador factor K) [9]

Sea *R(t)* la envolvente de la señal recibida (en voltaje). Se define

$$\mu = \mathrm{E}[R] / \sqrt{\mathrm{E}\left[R^2\right]} \tag{14}$$

y

$$\gamma = \mathrm{V}\left[R^2\right] / \left(\mathrm{E}\left[R^2\right]\right)^2 \tag{15}$$

donde $\mathrm{V}[\bullet]$ representa la varianza. Es posible demostrar que:

$$\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(K+1)^{-1/2} exp(-K/2) \cdot \left[(K+1) I_0(K/2) + K \cdot I_1(K/2)\right] \tag{16}$$

$$\gamma = \frac{2K+1}{(K+1)^2} \tag{17}$$

Nótese que μ y γ sólo dependen de *K*, y el efecto de Ω desaparece de las ecuaciones. Esto nos permite estimar *K* y Ω separadamente.

A partir de (18) es posible despejar el valor de *K*:

$$K = \frac{\sqrt{1-\gamma}}{1-\sqrt{1-\gamma}} \tag{18}$$

El valor estimado de γ, que denominamos $\hat{\gamma}$ se puede obtener en base a la varianza y promedio de los datos medidos de R usando (15) . En base a este valor estimado de γ se obtiene una estimación $\hat{K}$ para K mediante

$$\hat{K} = \frac{\sqrt{1-\hat{\gamma}}}{1-\sqrt{1-\hat{\gamma}}} \tag{19}$$

Se invita al lector a profundizar el tema en [8] y [9].

5. Estimador del factor K a partir de la varianza de los datos [2]

En la memoria de titulación [2], se exhibe un desarrollo matemático que permite concluir que para valores altos del factor K, es posible simplificar el análisis y obtener resultados eficientes en la estimación a través de la siguiente fórmula:

$$\hat{K}_f = \frac{200}{\{log_e(10)\}^2 \mathrm{V}\left[P(t)\left[dBm\right]\right]} \tag{20}$$

donde P(t) es la envolvente de la señal recibida en dBm y $\mathrm{V}[\bullet]$ representa la varianza de los datos medidos

6. Mediciones y análisis del factor K [2]

La señal recibida $r(t)$, puede ser expresada en función de la componente dominante A, las componentes en cuadratura (Gaussianas pasabajos) del ruido $n_c(t)$, $n_s(t)$ y de las componentes Gaussianas en cuadratura (pasabajos) de la señal que sufre desvanecimientos por multitrayecto $e_c(t)$, $e_s(t)$ de acuerdo a la ecuación (21)

$$r(t) = A\cos(\omega_o t) + e_c(t)\cos(\omega_o t) + e_s(t)\sin(\omega_o t) + n_c(t)\cos(\omega_o t) + n_s(t)\sin(\omega_o t) \tag{21}$$

Ciñéndonos a este modelo, existen dos parámetros básicos: el factor K de la distribución Rice (K_f) y la relación señal a ruido (CNR), definidas por:

$$K_f = \frac{A^2}{2\sigma_f^2} \quad \text{donde} \quad \sigma_f^2 = \mathrm{E}\left[e_c^2(t)\right] = \mathrm{E}\left[e_s^2(t)\right] \tag{22}$$

$$CNR = \frac{A^2}{2\sigma_n^2} \quad \text{donde} \quad \sigma_n^2 = \mathrm{E}\left[n_c^2(t)\right] = \mathrm{E}\left[n_s^2(t)\right] \tag{23}$$

Es posible ver de (21) que la potencia fluctuará debido al ruido del receptor y a los desvanecimientos, por lo que es necesario separar dichos efectos.

Se demuestra [2] que en presencia de ruido e inestabilidades en las mediciones, la varianza de las componentes en fase y en cuadratura es la suma de σ_f^2 y σ_n^2. Luego, al utilizar algún método de estimación para K_f a partir de los datos (en forma directa), se obtendrá un valor erróneo, K_Σ, definido por:

$$K_\Sigma = \frac{A^2}{2\left(\sigma_n^2 + \sigma_f^2\right)} \tag{24}$$

Con objeto de determinar el valor de K producido por el ruido e inestabilidades, es necesario simular (en un laboratorio) un canal invariante en el tiempo (sin desvanecimiento), intercalando atenuadores entre el Tx y Rx. Este valor de *K* será llamado K_n y está definido por:

$$K_n = \frac{A^2}{2\sigma_n^2} = CNR \tag{25}$$

El valor de K_n limita la máxima precisión en la resolución del factor *K* [2].

A partir de las ecs. (22), (24)y (25), es fácil ver que:

$$K_f = \frac{K_n K_\Sigma}{K_n - K_\Sigma} \tag{26}$$

La ecuación (26) sugiere que la influencia del ruido y deriva del receptor puede ser eliminada si K_n es medido antes de procesar los parámetros de las mediciones “en terreno”.

En la práctica es preferible asegurar que K_n sea lo suficientemente alto como para que se pueda asumir $K_f \approx K_\Sigma$ Cabe destacar que valores de K_f superiores a 1000 implican niveles de desvanecimientos de solo fracciones de un [dB], de manera que tiene muy poco sentido buscar gran precisión en la medición de valores de K_f tan elevados.

7. AUTOCORRELACIÓN Y AUTOCOVARIANZA[10]

La *autocorrelación* de un proceso aleatorio $x(t)$, real o complejo, es por definición el promedio estadistico del producto $x(t_1)x^*(t_2)$. Esta función se denota $R(t_1,t_2)$, $R_x(t_1,t_2)$ o $R_{xx}(t_1,t_2)$. Entonces,

$$R_{xx}(t_1,t_2) = E\left[x(t_1)x^*(t_2)\right] \tag{27}$$

donde el término conjugado ($x^*(\cdot)$) es asociado a la segunda variable en $R_{xx}(t_1,t_2)$. De lo anterior se desprende:

$$R_{xx}(t_2,t_1) = E\left[x(t_2)x^*(t_1)\right] = R_{xx}^*(t_1,t_2) \tag{28}$$

Además,

$$R(t,t) = E\left\{|x(t)|^2\right\} \geq 0 \tag{29}$$

La *autocovarianza* $C(t_1,t_2)$ de un proceso $x(t)$ es la covarianza de las variables aleatorias $x(t_1)$ y $x(t_2)$:

$$C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - \eta(t_1)\eta^*(t_2) \tag{30}$$

donde $\eta(t) = \mathrm{E}\left[x(t)\right]$, el valor medio de x(t). Para procesos estacionarios $C(t_1,t_2)$ y $R(t_1,t_2)$ sólo dependen de $|t_1 - t_2|$

Para estimar la autocorrelación de un proceso aleatorio $x(t)$, por lo general se asume que éste es *ergódico* o sea que el promedio estadístico puede obtenerse en base a un promedio temporal de muestras. Si se dispone de N muestras tomadas periódicamente a intervalos Δt se estima la autocorrelación como:

$$\hat{R}_x(k\Delta\tau) = \frac{1}{N}\sum_{i=n}^{N} x(k\Delta\tau)x(k\Delta\tau + n) \tag{31}$$

La autocovarianza se estima en forma similar, la única diferencia es que se resta el valor medio estimado del proceso

Matlab calcula la estimación de la autocovarianza estimando primeramente la densidad espectral de potencia, que es la Transformada de Fourier de la autocovarianza. Luego invierte esta función mediante la FFT inversa. La función de autocovarianza estimada se denomina “autocorr(variable, retardos)”,

8. TIEMPO DE COHERENCIA

El “Tiempo de Coherencia” (T_C) es una medida del tiempo durante el cual el canal conserva sus características. Si se mide la atenuación del canal mediante la transmisión de una señal senoidal pura (“continuos wave” o CW) el tiempo de coherencia es una medida de cuanto tiempo transcurre entre muestras de atenuación que puedan considerarse estadísticamente independientes. Nótese que la atenuación así como la amplitud o potencia de la señal recibida consisten de un término constante no aleatorio (el valor medio) y un término fluctuante o aleatorio. La independencia estadística se refiere exclusivamente a las características de este último. Las referencias [3] y [11] indican que comúnmente se utiliza el siguiente criterio para definir el tiempo de coherencia: “El tiempo de coherencia es el tiempo durante el cual la autocovarianza de la señal está por sobre 0,5”.

BIBLIOGRAFÍA

[1] R. Feick, W.Grote, H.Hristov, “*Criterios y procedimientos para mediciones de propagación electromagnética en ambientes confinados*”, SENACITEL 2002.

[2] L.Ahumada, C.Morales, “*Análisis de desvanecimientos temporales en un enlace de 3,5[GHz]”,* Memoria de Titulación para optar al grado de Ing. Civil Electrónico, 2003.

[3] T. Rappaport, “*Wireless Communications*”, Ed. Prentice Hall, 1996.

[4] R. Bultitude, “*Measurement Characterization and Modeling of Indoor 800/900 MHz Radio Channels for Digital Communications*”, IEEE Communications Magazine Vol.25 No.6, 1987.

[5] T. Rappaport, C. Mcguillem, “*UHF Fading in Factories*”, IEEE Journal on selected areas in communications, Vol.7 No1, 1989.

[6] P. Soma, D.S. Baum, V.Erceg, R.Krishnamoorthy and A.J.Paulraj, “*Analysis and Modeling of Multiple-Input Multiple-Output (MIMO) Radio Channel Based on Outdoor Measurements Conducted at 2.5GHz for Fixed BWA Applications*”, 0-7803-7400-2/02/$17.00 © 2002 IEEE

[7] T.Wysocki, H.Zepernick, “*Characterization of the indoor radio propagation channel at 2,4GHz*”, Journal of Telecommunications and information Technology, 3-4 2000.

[8] L.J.Greenstein, D.G. Michelsono, V.Erceg, “*Moment-Method Estimation of the Ricean K-Factor*”, IEEE Communications Letters, Vol.3, No6, June 1999.

[9] A.Abdi, C.Tepedelenlioglu, M.Kaveh, G.Giannakis, “*On the Estimation of the K Parameter for the Rice Fading Distribution*”, IEEE Communications Letters, Vol.5, No3, March 2001.

[10] A.Papoulis, “*Probability, Random Variables, and Stochastic Processes”,* McGraw-Hill, Third Edition, 1991.

[11] P.Marinier, G.Delisle, Ch. Despins, “*Temporal Variations of the Indoor Wireless Milimeter-Wave Channel*”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 46, No. 6, June 1998